



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Εισαγωγή σε Μεθόδους Monte Carlo

1η Σειρά Ασκήσεων

Βαγγέλης Χαρμανδάρης

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

ΑΣΚΗΣΗ 1: Γεννήτριες Τυχαίων Αριθμών (70 Μονάδες)

Στόχος της άσκησης αυτής είναι η εξέταση της αποδοτικότητας γεννητριών τυχαίων αριθμών. Για τα παρακάτω προγράμματα μπορείτε να χρησιμοποιήσετε οποιαδήποτε γλώσσα προγραμματισμού προτιμάτε (π.χ. MATLAB, C++, Fortran90).

A) Θεωρήστε τον παρακάτω αλγόριθμο δημιουργίας ακολουθίας τυχαίων αριθμών (congruential generator), $X=[X_i]$ ($i=1,2,\dots,n$):

$$Y_i = D(x) = (aY_{i-1} + b) \bmod(M), \quad X_i = Y_i / M$$

όπου a, b, M είναι σταθερές (φυσικοί αριθμοί). Υπολογίστε:

- (1) Αν, για δεδομένο n , η ακολουθία X υπακούει την ομοιόμορφη κατανομή στο $[0,1]$. Υπολογίστε την πιθανότητα κάνοντας το ιστόγραμμα της X .
- (2) Μελετήστε αν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ διαδοχικών τυχαίων αριθμών κάνοντας το διάγραμμα X_{2k-1} , vs. X_{2k} .

Θεωρήστε διαφορετικές τιμές για τις σταθερές (π.χ. $a=453$, $b=10$, $M=2^{13}$) και διαφορετικές τιμές του n .

B) Όπως έχουμε αναφέρει υπάρχουν καλύτεροι αλγόριθμοι δημιουργίας τυχαίων αριθμών. Θεωρείστε την προεπιλεγμένη γεννήτρια τυχαίων αριθμών της γλώσσας που χρησιμοποιείται (π.χ. MATLAB: συνάρτηση *rand*, Mersenne Twister algorithm). Περιγράψτε τον παραπάνω αλγόριθμο Mersenne Twister (<http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~m-mat/MT/emt.html>).

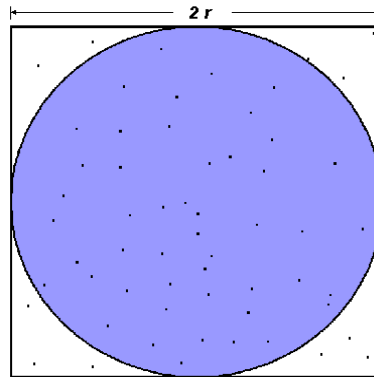
Γ) Επαναλάβετε τα παραπάνω βήματα για την προεπιλεγμένη γεννήτρια τυχαίων αριθμών της γλώσσας που χρησιμοποιείται (π.χ. MATLAB: συνάρτηση *rand*, Mersenne Twister algorithm).

Γράψτε μια αναφορά που περιέχει τα εξής:

1. Συνοπτική περιγραφή των αλγορίθμων που χρησιμοποιείται.
2. Παράθεση και περιγραφή των αποτελεσμάτων. Συγκρίνετε τις αποδόσεις των διαφορετικών μεθόδων και αιτιολογήστε τις διαφορές.

ΑΣΚΗΣΗ 2: Υπολογισμός του Αριθμού π (30 Μονάδες)

Θεωρήστε τον αλγόριθμο υπολογισμού του αριθμού π που συζητήσαμε στην τάξη και ο οποίος βασίζεται στον υπολογισμό του εμβαδόν ενός κύκλου και του τετραγώνου με το οποίο τον περικλείουμε (*raindrop experiment*).



$$\begin{aligned}A_S &= (2r)^2 = 4r^2 \\A_C &= \pi r^2 \\ \pi &= 4 \times \frac{A_C}{A_S}\end{aligned}$$

Φτιάξτε ένα αλγόριθμο υπολογισμού του π χρησιμοποιώντας μια κατάλληλη γεννήτρια τυχαίων αριθμών. Έστω n ο αριθμός των τυχαίων σημείων μέσα στο τετράγωνο. Βρείτε και γράψτε σε μια αναφορά τα ακόλουθα:

- Περιγράψτε λεπτομερώς τον αλγόριθμο που χρησιμοποιείτε.
- Υπολογίστε τον αριθμό π για $n = 1000, 10000, 1000000$; Για καλύτερη ακρίβεια τρέξτε το πρόγραμμα 10 φορές για κάθε n και υπολογίστε τη μέση τιμή του π . Φτιάξτε ένα διάγραμμα με όλες τις τιμές (εκτιμήσεις) του π .
- Υπολογίστε το σφάλμα των μετρήσεων χρησιμοποιώντας την ακριβή τιμή του αριθμού π ($\pi = 3,141592653589793$). Κάντε το διάγραμμα του σφάλματος της μέτρησης ως προς τον αριθμό των τυχαίων σημείων n . Εκτιμήστε πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το n για ακρίβεια υπολογισμού του π ίση με: 3, 5, 7 σημαντικών ψηφίων.

Σημειώματα

Σημείωμα αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Βαγγέλης Χαρμανδάρης. «Εισαγωγή σε Μεθόδους Monte Carlo. 1η Σειρά Ασκήσεων». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://opencourses.uoc.gr/courses/course/view.php?id=228>

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγο Έργο 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

