



# ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

---

Εισαγωγή σε Μεθόδους Monte Carlo

**3η Σειρά Ασκήσεων**

Βαγγέλης Χαρμανδάρης

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

---

## ΑΣΚΗΣΗ : Αλγόριθμος Metropolis

Στόχος της άσκησης αυτής είναι η μελέτη αλγορίθμων Monte Carlo Μαρκοβιανών Αλυσίδων (MCMC) τύπου Metropolis τυχαίου περιπάτου (random walk). Έστω τυχαία μεταβλητή (τ.μ.)  $x$ , η Μαρκοβιανή αλυσίδα της οποίας δίνεται από τον κανόνα μετάβασης:

$$y_t = x^{(t)} + A\varepsilon_t$$

όπου  $x^{(t)}$  είναι η τιμή της τ.μ. στην επανάληψη  $t$  και  $y_t$  η προτεινόμενη τιμή στην επόμενη επανάληψη.  $A$  είναι μια σταθερά και  $\varepsilon_t$  μια τυχαία μεταβλητή η οποία έρχεται μέσα από μια συμμετρική κατανομή  $f()$ . Η Μαρκοβιανή αλυσίδα, που σχετίζεται με την κατανομή  $f$ , είναι τυχαίος περίπατος στη μεταβλητή  $\varepsilon$  και στην μεταβλητή  $x$ .

Δημιουργήστε γενικό αλγόριθμο Metropolis MC της μορφής:

- Δεδομένου  $x^{(t)}$  δημιουργήστε  $y_t \sim f(y - x^{(t)})$ .

- 

$$x^{(t+1)} = \begin{cases} y_t, & \text{με πιθανότητα } \rho(x^{(t)}, y_t) = \min\left\{1, \frac{f(x^{(t)})}{f(y_t)}\right\} \\ x^{(t)}, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Χρησιμοποιήστε σαν  $f()$ :

- Ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα  $[-\delta, \delta]$ ,
- Κανονική κατανομή  $N(0,1)$  στο διάστημα  $[-\delta, \delta]$ .
- Εκθετική κατανομή  $\text{Exp}()$ , στο διάστημα  $[-\delta, \delta]$ , αφού πρώτα την κανονικοποιήσετε.

Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις  $\delta$  είναι μια σταθερά.

1) Περιγράψτε τον αλγόριθμο Metropolis. Βρείτε την πιθανότητα αποδοχής συναρτήσει της σταθεράς  $A$ .

2) Τρέξτε τον αλγόριθμο για διαφορετικές τιμές των σταθερών  $\delta$  και  $A$ : π.χ.  $(\delta=0.5, A=4)$ ,  $(\delta=1.0, A=4)$ ,  $(\delta=0.5, A=2)$ ,  $(\delta=0.5, A=10)$ , για τις τρεις διαφορετικές κατανομές. Υπολογίστε σε κάθε περίπτωση την κατανομή πιθανότητας της (τ.μ.)  $x$  σε μορφή ιστογράμματος.

3) Τρέξτε τον αλγόριθμο για διαφορετικές τιμές του μεγέθους της αλυσίδας (αριθμός των επαναλήψεων)  $n$ , π.χ.  $n=1000$ ,  $10000$ ,  $100000$ . Υπολογίστε σε κάθε περίπτωση την κατανομή πιθανότητας της (τ.μ.)  $x$  σε μορφή ιστογράμματος.

4) Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διακύμανση για κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις των ερωτημάτων (2) και (3). Εξετάστε επίσης τη σύγκλιση της μέσης τιμής κάνοντας διαγράμματα μέσης τιμής,  $\mu(i)$ , συνάρτηση της επανάληψης  $i$ ,  $i=1,2,\dots,n$ .

Γράψτε μια αναφορά που περιέχει τα εξής:

1. Συνοπτική περιγραφή των αλγορίθμων που χρησιμοποιείται.
2. Παράθεση και περιγραφή των αποτελεσμάτων. Συγκρίνετε τις αποδόσεις (μέση τιμή, διακύμανση) και αιτιολογήστε τις διαφορές.

## Σημειώματα

### Σημείωμα αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Βαγγέλης Χαρμανδάρης. «Εισαγωγή σε Μεθόδους Monte Carlo. 3η Σειρά Ασκήσεων». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://opencourses.uoc.gr/courses/course/view.php?id=228>

### Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγο Έργο 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

### Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

## Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

