ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινὸ Ἑξάμηνο 2015-2016

Καθηγητὴς Ν. Γ. Τζανάκης

Ἀσκήσεις τῆς 11^{ης} ἑβδομάδας

80. Ὑπολογῖστε τὶς τάξεις τῶν μεταθέσεων
$$\sigma = (1\,2\,3\,4)(2\,5\,4)(6\,1\,3) \in S_6, \quad \tau = (2\,5\,4\,7)(5\,7\,1\,2)(1\,6\,8\,7) \in S_8.$$

81. Νὰ βρεθοῦν τὰ $a, b \in \mathbb{N}$ γιὰ τὰ ὁποῖα ἡ μετάθεση
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & a & 1 & b & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix} \in S_7$$
εἶναι περιττή.

82. Ἔστω $H \leq S_n$, ἡ ὁποία περιέχει μία, τουλάχιστον, περιττὴ μετάθεση. Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ τάξη τῆς H εἶναι ἄρτιος ἀριθμὸς καὶ ἀκριβῶς τὰ μισὰ στοιχεῖα τῆς H εἶναι περιττὲς μεταθέσεις.
Ὑπόδειξη. Ἔστω $H = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \pi_1, \ldots, \pi_l\}$, ὅπου τὰ α συμβολίζουν ἄρτιες μεταθέσεις καὶ τὰ π περιττές. Ἐξ ὑποθέσεως, $l \geq 1$. Ἐξηγῆστε γιατὶ $\pi_1 H = H$. Μετά, παρατηρῆστε ὅτι $\pi_1 H = \{\pi_1\alpha_1, \ldots, \pi_1\alpha_k, \pi_1\pi_1, \ldots, \pi_1\pi_l\}$. Ποιὲς ἀπὸ τὶς μεταθέσεις τοῦ τελευταίου συνόλου εἶναι ἄρτιες καὶ ποιὲς περιττές;

83. Ἔστω $n \geq 3$ καὶ $a, b \in \{2, \ldots, n\}$, $a \neq b$.
(α′) Ἀποδεῖξτε ὅτι, στὴν S_n ἰσχύει ἡ σχέση $(a\,b) = (1\,a)(1\,b)(1\,a)$.
(β′) Ἀποδεῖξτε ὅτι $S_n = \langle (1\,2), (1\,3), \ldots, (1\,n) \rangle$. Δηλαδή, κάθε $\sigma \in S_n$ εἶναι γινόμενο ἀντιμεταθέσεων τῆς μορφῆς $(1\,i)$.

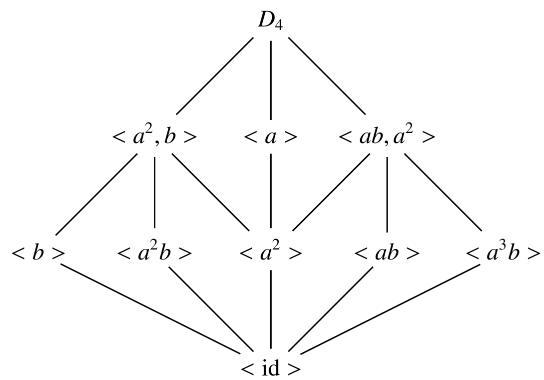
84. Ἔστω $n \geq 3$ καὶ $i, j \in \{2, \ldots, n\}$, $i \neq j$.
(α′) Ἀποδεῖξτε ὅτι $(1\,i)(1\,j) = (1\,j\,i) = (1\,2\,i)^2(1\,2\,j)(1\,2\,i)$.
(β′) Ἀποδεῖξτε ὅτι $A_n = \langle (1\,2\,3), (1\,2\,4), \ldots, (1\,2\,n) \rangle$ (ὑπενθυμίζεται ὅτι A_n εἶναι ἡ ἐναλλάσουσα ὁμάδα βαθμοῦ n, δηλαδή, ἡ ὑποομάδα τῆς S_n, τῆς ὁποίας τὰ στοιχεῖα εἶναι οἱ ἄρτιες μεταθέσεις τῆς S_n.

85. Ἔστω ὁμάδα $(G, \cdot)$ καὶ $a, b \in G$, τέτοια ὥστε $ab = ba$. Ἔστω, ἀκόμη, ὅτι $\textit{τάξη}\,(a) = m$ καὶ $\textit{τάξη}\,(b) = n$.
(α′) Ἀποδεῖξτε ὅτι $\textit{τάξη}\,(ab) \mid \text{ΕΚΠ}\,(m, n)$.
(β′) Ἀποδεῖξτε ὅτι, ἂν $(m, n) = 1$, τότε $\textit{τάξη}\,(ab) = mn$.

86. Ἔστω ὁμάδα G καὶ ἀκέραιος $m \geq 3$. Ἀποδεῖξτε τὸ ἑξῆς: Ἂν ὑπάρχει στὴ G στοιχεῖο τάξεως m, τότε τουλάχιστον $\phi(m)$ τὸ πλῆθος στοιχεῖα τῆς G ἔχουν τάξη m.
(Σημείωση: Δὲν εἶναι απαραίτητο νὰ εἶναι πεπερασμένη ἡ G.)

87. Ἔστω πεπερασμένη ὁμάδα $(G,\cdot)$. Θεωροῦμε τὸ σύνολο $S=\{g\in G : \textit{τάξη}\,(g)>2\}$ καὶ ὁρίζομε στὸ S τὴν ἑξῆς σχέση: $g_1\sim g_2 \Leftrightarrow g_2\in\{g_1, g_1^{-1}\}$.
(α΄) Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ $\sim$ εἶναι σχέση ἰσοδυναμίας στὸ S καὶ κάθε κλάση ἰσοδυναμίας περιέχει ἀκριβῶς δύο στοιχεῖα. Συμπεράνατε ἐξ αυτοῦ ὅτι $|S|=$ ἄρτιος.
(β΄) Ἔστω, τώρα, ὅτι ἡ τάξη τῆς G εἶναι ἄρτιος ἀριθμός. Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων τῆς G, τάξεως 2, εἶναι περιττό. Εἰδικώτερα, αὐτὸ συνεπάγεται ὅτι κάθε ὁμάδα ἄρτιας τάξης περιέχει στοιχεῖα τάξεως 2.
Ὑπόδειξη: $G=\{1\}\cup\{\text{στοιχεῖα τάξεως } 2\}\cup S$.

88. Τὸ διάγραμμα ὑποομάδων τῆς $D_4=\langle a,b\,|\,a^4=1=b^2,\ ba=a^3b\rangle$ εἶναι τὸ παρακάτω:



Γιὰ κάθε μία μὴ τετριμμένη γνήσια ὑποομάδα ὑπολογῖστε τὶς ἀριστερὲς καὶ τὶς δεξιὲς κλάσεις. Ποιὲς ἀπὸ αὐτὲς τὶς ὑποομάδες εἶναι κανονική;

Ἀναφορὲς

[1] Δ. Βάρσος, Δ. Δεριζιώτης, Γ. Εμμανουήλ, Μ. Μαλιάκας, Ο. Ταλέλλη, *Μια Εισαγωγή στην Άλγεβρα*, Γ΄ Έκδοση Εκδόσεις ΣΟΦΙΑ, Αθήνα 2012.