ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Λογική

Δημήτρης Πλεξουσάκης

1ο μέρος σημειώσεων: Προτασιακός Λογισμός

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Εισαγωγή

1.1 Σύντομη Ιστορική Ανασκόπηση

Η θεμελίωση της Λογικής ως επιστήμη αποδίδεται στον Αριστοτέλη, αν και τα πρώτα βήματα προς αυτή την κατεύθυνση έγιναν από τους Ίωνες και Ελεάτες φιλοσόφους και τους Σοφιστές. Το ενδιαφέρον για τη Λογική άρχισε να φθείνει στους πρώτους αιώνες μ.Χ. και μέχρι το Μεσαίωνα. Αναζοπυρώθηκε με την ανακάλυψη των μη-Ευκλείδιων Γεωμετριών και τη διαπίστωση της ανάγκης για την θεωρητική θεμελίωση της Ανάλυσης. Σημαντικά γεγονότα στην ιστορία της ανάπτυξης της Λογικής:

- 1879: ο Frege προτείνει την πρώτη τυπική γλώσσα για τα Μαθηματικά και τη Λογική
- 1895-97: ο Cantor δημοσιεύει τη θεμελίωση της θεωρίας συνόλων
- 1899: δημοσιεύεται το παράδοξο της θεωρίας του Cantor για τους πληθικούς αριθμούς
- 1902: δημοσιεύεται το παράδοξο του Russell:

  "Κάθε σύνολο χαρακτηρίζεται στη θεωρία του Cantor από τη χαρακτηριστική ιδιότητα των στοιχείων του. Έστω το σύνολο A των συνόλων Q, όπου τα σύνολα Q χαρακτηρίζονται από την ιδιότητα $Q \notin A$. Δηλαδή, $A = \{Q \mid Q \notin A\}$."

  Τέτοια παράδοξα έδειξαν ότι μόνο αυστηρή τυποποίηση των εννοιών των Μαθηματικών μπορούν να προσφέρουν θεωρίες χωρίς αντινομίες.
- Δεκαετία 1930: ο Hilbert αναπτύσσει την αξιωματική μέθοδο της Λογικής
- αρχές δεκαετίας 1950: με την ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών, άρχισε σταδιακά και η χρήση τους για υπολογισμούς με σύμβολα (symbol manipulation). Γράφονται και τα πρώτα προγράμματα για την απόδειξη απλών θεωρημάτων.
- 1965: ο Robinson προτείνει τη μέθοδο της Επίλυσης (resolution) για το χειρισμό συμβόλων και εκτέλεση μηχανικών αποδείξεων
- αρχές δεκαετίας 1970: οι Kowalski και Colmeraurer προτείνουν τη Λογική σαν γλώσσα προγραμματισμού (Prolog)

1.2 Ρόλος της Λογικής στην Επιστήμη Υπολογιστών

Η ενότητα αυτή αποσκοπεί στο να αναδείξει το ρόλο της Λογικής σαν θεμελιώδες συστατικό της Επιστήμης Υπολογιστών. Γίνεται σύντομη αναφορά σε θεματικές περιοχές της Επιστήμης Υπολογιστών όπου η συμβολή της Λογικής είναι πλέον εμφανής:

- *Λογικά Κυκλώματα (Logic circuits)*
  Στη Λογική, προτάσεις συνδυάζονται με συνδέσμους (σύζευξη, διάζευξη, άρνηση). Λογικά κυκλώματα σχηματίζονται με συνδυασμούς πυλών (AND, OR, NOT). Κάθε κύκλωμα μπορεί να χαρακτηριστεί από μια πρόταση του Προτασικαού Λογισμού. Προβλήματα σχεδιασμού κυκλωμάτων μεταφράζονται σε προβλήματα εύρεσης αντίστοιχων προτάσεων και του χειρισμού αυτών.

- *Προγραμματισμός: Boolean data types*
  Οι τύποι δεδομένων Boolean επιδέχονται δύο τιμές: true, false. Μπορούν να συνδυαστούν μέσω συνδετικών and, or, not για να παράγουν σύνθετες εκφράσεις του ίδιου τύπου.
- *Σχεδίαση Προγραμμάτων (Program Design)*
  Πριν γραφτεί ένα πρόγραμμα, απαιτείται ένα σύνολο προδιαγραφών (program specifications) οι οποίες καθορίζουν τη συμπεριφορά του προγράμματος. Οι προδιαγραφές αυτές μπορούν να γράφονται σε φυσική γλώσσα (ελληνικά, αγγλικά), σε ψευδογλώσσα ή ψευδοκώδικα (pseudo-code) ή σε μια τυπική ή τεχνική γλώσσα. Προδιαγραφές σε τυπικές γλώσσες είναι πλέον χρήσιμες καθώς επιτρέπουν (συχνά) την επαλήθευση ότι το πρόγραμμα συμπεριφέρεται σύμφωνα με τις προδιαγραφές. Διαφορετικά, η συμπεριφορά ενός προγράμματοας μπορεί να ελεγχθεί μόνο με επαναληπτικές δοκιμές, οι οποίες όμως δεν μπορούν πολλές φορές να εξαντλήσουν όλες τις δυνατές περιπτώσεις. Η Λογική μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στην περιγραφή του ίδιου του προγράμματος και της επιθυμητής συμπεριφοράς του. Τεχνικές της Λογικής χρησιμοποιούνται για να ελεγχθεί αν οι εκφράσεις της συμπεριφοράς του προγράμματος είναι λογικές συνέπειες των εκφράσεων που περιγράφουν το πρόγραμμα.
- *Λογικός Προγραμματισμός (Logic programming)*
  Η πλειοψηφία των γλωσσών προγραμματισμού ακολουθούν την περιγραφή των βημάτων που πρέπει να γίνουν προκειμένου να παραχθεί ένα επιθυμητό αποτέλεσμα. Ο Λογικός Προγραμματισμός ακολουθεί ένα διαφορετικό στυλ: περιγράφει *ποιό* είναι το επιθυμητό αποτέλεσμα και όχι το *πώς* θα επιτευχθεί. Αυτό γίνεται με τη βοήθεια προτάσεων και κανόνων εξαγωγής συμπερασμάτων που ορίζει ο προγραμματιστής. Ουσιαστικά, ένα λογικό πρόγραμμα είναι ένα σύνολο από εκτελέσιμες προδιαγραφές.
- *Αυτοματοποιημένος Λογισμός (Automated Reasoning)*
  Ο Λογικός Προγραμματισμός εκτελεί μια μορφή αυτοματοποιημένου λογισμού. Για συγκεκριμένουν κλάδους των Μαθηματικών (π.χ. Θεωρία Αριθμών, ‘Αλγεβρα) υπάρχουν συστήματα αυτομάτων αποδείξεων βασισμένα στη Λογική και το χειρισμό συμβόλων. Παρόμοια προγράμματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για την επαλήθευση προγραμμάτων (program verification) για να ελέγχουν αν υλοποιούν σωστά τις προδιαγραφές τους. Ένα ενδιαφέρον πρόβλημα είναι επίσης η σύνθεση προγρμμάτων, δηλαδή το πρόβλημα της παραγωγής ενός προγράμματος δεδομένων κάποιων προδιαγραφών, έτσι ώστε να αποδεικνύεται ότι το πρόγραμμα υλοποιεί σωστά τις προδιαγραφές.
- *Τεχνητή Νοημοσύνη (Artificial Intelligence)*
  Η Τεχνητή Νοημοσύνη αποσκοπεί στην κατασκευή υπολογιστικών μοντέλων της ανθρώπινης νοητικής διαδικασίας. Η Λογική μπορεί να δώσει το τεχνικό υπόβαθρο για διάφορες νοητικές διαδικασίες, όπως για παράδειγμα η αναπαράσταση γνώσης (knowledge representation).
- *Βάσεις Δεδομένων και Γνώσεων (Data and Knowledge Bases)*
  Η Λογική και η Θεωρία Συνόλων αποτέλεσαν τη βάση του Σχεσιακού Μοντέλου Δεδομένων (Relational Data Model) το οποίο είνα το πλέον επιτυχημένο και δημοφιλές μοντέλο δεδομένων στην περιοχή των Βάσεων Δεδομένων. Οι βάσεις γνώσεων αναπαριστούν γνώση με τη μορφή λογικών εκφράσεων. Η παραγωγή

συμπερασμάτων από βάσεις δεδομένων ή γνώσεων γίνεται με γλώσσες επερωτήσεων (query languages) και συμπερασματικούς κανόνες (inference rules) που συνήθως βασίζονται σε διαλέκτους του Κατηγορηματικού Λογισμού (Predicate calculus).

2. Προτάσεις

Μια **λογική πρόταση** είναι μια γλωσσική έκφραση (πρόταση) η οποία μπορεί να χαρακτηριστεί ως αληθής ή ως ψευδής. Υπάρχουν προτάσεις οι οποίες δεν είναι λογικές προτάσεις. Τέτοιες, για παράδειγμα, είναι οι:

1. ερωτηματικές προτάσεις
2. προσταγές ή ευχετικές προτάσεις
3. μια πρόταση μπορεί να μην είναι λογική πρόταση επειδή κάποιες από τις λέξεις δεν έχουν ακριβή σημασιολογία. Π.χ., η πρόταση « ο Χ είναι φοιτητής του τμήματος». Η πρόταση μπορεί να χαρακτηριστεί ως αληθής ή ψευδής αν γνωρίζομε ποιος είναι ο Χ και ποιο είναι το τμήμα. Απαιτείται δηλαδή η απόδοση ερμηνείας στους όρους αυτούς.

Στη Λογική μας ενδιαφέρουν οι προτάσεις για τις οποίες υπάρχει ερμηνεία που να τις καθιστά αληθείς ή ψευδείς.

2.1 Λογικοί Σύνδεσμοι

Λογικές προτάσεις σχηματίζονται με τη χρήση λογικών συνδέσμων:

1. **Σύζευξη** (conjunction). Συμβολίζεται με το σύμβολο $\wedge$

   Παράδειγμα**:** Έστω ότι γνωρίζομε δύο ιδιότητες ενός ακεραίου αριθμού x : $x > 4$ και $x < 9$. Τότε για το x γνωρίζομε τις προτάσεις Α: $x>4$ και Β: $x<9$. Τότε όμως γνωρίζομε και την πρόταση: ο x είναι μεγαλύτερος του 4 και (ο x είναι) μικρότερος του 9, δηλαδή τη *σύζευξη* των Α και Β. Έτσι, $A \wedge B$ δηλώνει την πρόταση "$x>4$ και $x<9$" (ή όπως γράφεται εν συντομία "$4 < x < 9$").

2. **Άρνηση** (negation). Συμβολίζεται με το σύμβολο $\neg$

   Παράδειγμα**:** Έστω η πρόταση Γ: «το 50 είναι διαιρετό δια 7». Τότε η *άρνηση* της Γ ($\neg\Gamma$) είναι η πρόταση «το 50 δεν είναι διαιρετό δια 7».

3. **Διάζευξη** (disjunction). Συμβολίζεται με το σύμβολο $\vee$

   Παράδειγμα**:** Έστω οι προτάσεις Δ: " το 60 είναι πολλαπλάσιο του 6" και Ε: " το 60 είναι πολλαπλάσιο του 5". Τότε η *διάζευξη* των Δ και Ε είναι η πρόταση $\Delta \vee E$: " το 60 είναι πολλαπλάσιο του 6 ή πολλαπλάσιο του 5". Όπως φαίνεται και από το παράδειγμα, η διάζευξη δεν είναι αποκλειστική μια και το 60 είναι πολλαπλάσιο και του 6 και του 5.

4. **Συνεπαγωγή** (implication). Συμβολίζεται με το σύμβολο →

   Παράδειγμα**:** Έστω οι προτάσεις Ζ: " ο αριθμός α είναι πολλαπλάσιο του 10" και Η: " ο αριθμός α είναι πολλαπλάσιο του 5". Τότε η πρόταση Ζ → Η (αν Ζ, τότε Η) είναι η πρόταση " αν ο αριθμός α είναι πολλαπλάσιο του 10, τότε ο αριθμός α είναι πολλαπλάσιο του 5".

5. **Ισοδυναμία** (equivalence). Συμβολίζεται με το σύμβολο ↔

   Παράδειγμα**:** Έστω οι προτάσεις Θ: " το 16 πολλαπλάσιο του 2" και Κ: " το 16 είναι άρτιος αριθμός". Τότε η πρόταση Θ ↔ Κ (Θ αν και μόνο αν Κ) είναι η πρόταση " το 16 είναι πολλαπλάσιο του 2 αν και μόνο αν το 16 είναι άρτιος αριθμός".

2.1.1 Ιδιότητες Λογικών Συνδέσμων

Για τους λογικούς συνδέσμους που ορίσαμε παραπάνω, ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

- Οι σύνδεσμοι ∧ και ∨ είναι *μεταθετικοί*, δηλαδή, για οποιεσδήποτε προτάσεις Α και Β, οι προτάσεις Α ∧ Β και Α ∨ Β είναι ισοδύναμες με τις προτάσεις Β ∧ Α και Β ∨ Α αντίστοιχα.
- Ο σύνδεσμος → *δεν είναι μεταθετικός*, δηλαδή, εν γένει, η πρόταση Α → Β δεν είναι ισοδύναμη με την πρόταση Β → Α.
  Παράδειγμα: Ενώ η πρόταση " αν ο α είναι πολλαπλάσιο του 10, τότε ο α είναι πολλαπλάστιο του 5" είναι λογικά αληθής, η πρόταση "αν ο α είναι πολλαπλάσιο του 5, τότε ο α είναι πολλαπλάστιο του 10" δεν είναι.

Προτάσεις που συντίθενται με χρήση λογικών συνδέσμων μπορεί να είναι αληθείς, ψευδείς, ή άλλοτε αληθείς και άλλοτε ψευδείς. Για παράδειγμα:

- η πρόταση "ένας ρητός αριθμός είναι 0 ή διάφορος από το 0" είναι αληθής
- η πρόταση "αν x=3, τότε x=5" είναι ψευδής
- η πρόταση "το x ισούται με την απόλυτη τιμή του και το y είναι αρνητικός" είναι 'αλοτε αληθής και άλλοτε ψευδής.

Πρέπει να τυποποιηθεί η απόφοση μιας τιμής αλήθειας σε προτάσεις βάσει της τιμής αλήθειας των υποπροτάσεών τους. Για παράδειγμα, διαισθητικά γνωρίζομε ότι η πρόταση " $x > 3 \rightarrow x > 0$" είναι αληθής. Ποιος κανόνας όμως μας επιτρέπει να το συμπεράνομε;

Πρέπει να εξεταστεί η σύνταξη των προτάσεων αλλά και οι κανόνες που καθορίζουν πότε και πως μπορούμε να εξάγομε έγκυρα συμπεράσματα από τα δεδομένα που διαθέτομε.

2.2 Συνέπεια (Consistency)

<u>Ορισμός:</u> Ένα σύνολο το οποίο περιέχει προτάσεις οι οποίες δεν μπορούν να είναι ταυτόχρονα αληθείς λέγεται **ασυνεπές** (inconsistent).

<u>Παραδείγματα:</u>

1. Μια απλή περίπτωση είναι όταν το σύνολο περιέχει προτάσεις οι οποίες αντικρούουν η μία την άλλη: $S_1 = \{x < 5, x \geq 5\}$, $S_2 = \{y=3, y\neq 3\}$
2. Σε άλλες περιπτώσεις, προτάσεις μπορούν να αντικρούουν η μία την άλλη έμμεσα: S_3 = { ο x είναι άρτιος μεγαλύτερος του 2, ο x είναι πρώτος αριθμός }. Η ασυνέπεια προκύπτει από την ερμηνεία που δίνουμε στους όρους "άρτιος" και "πρώτος αριθμός".
3. Ασυνέπεια μπορεί να προκύψει από τρεις ή περισσότερες προτάσεις για τις οποίες δεν υπάρχει ζεύγος αντικρουόμενων προτάσεων: S_4={x>2, x άρτιος, x πρώτος}, $S_5=\{x>y, y>z, z>x\}$. Παρατηρείστε ότι αν αφαιρέσομε οποιαδήποτε πρόταση από τα σύνολα S_4 και S_5 τα σύνολα δεν είναι πλέον ασυνεπή.

<u>Ορισμός:</u> Ένα σύνολο προτάσεων λέγεται **συνεπές** όταν δεν είναι ασυνεπές.

Προσοχή: Το γεγονός ότι ένα σύνολο είναι συνεπές δε σημαίνει ότι και όλες οι προτάσεις που περιέχονται σε αυτό είναι αληθείς. Σημαίνει ότι ενδέχεται να είναι αληθείς. Για παράδειγμα, το σύνολο $S_6 = \{x>y, y>z\}$ είναι συνεπές παρόλο που μπορούμε να βρούμε τιμές για τα x,y,z ώστε τουλάχιστον μια από τις προτάσεις να είναι ψευδής.

Ένα σύνολο που περιέχει μόνο μια πρόταση μπορεί επίσης να είναι ασυνεπές. Η πρόταση αυτή δεν μπορεί ποτέ να είναι λογικά αληθής. Για παράδειγμα, το σύνολο S_7={ το 2 είναι διαιρέτης κάθε περιττού αριθμού} είναι ασυνεπες.

Τέτοιες προτάσεις λέγονται **λογικά ψευδείς** (ή ταυτολογικά ψευδείς). Οποιοδήποτε ασυνεπές σύνολο μπορεί να παράγει μια λογικά ψευδή πρόταση. Πώς; Σχηματίζοντας τη σύζευξη των μελών του συνόλου. Για παράδειγμα, από το σύνολο $S_5=\{x>y, y>z, z>x\}$ σχηματίζομε την πρόταση $(x>y) \wedge (y>z) \wedge (z>x)$ η οποία είναι λογικά ψευδής.

Μια πρόταση είναι λογικά αληθής αν η άρνησή της είναι λογικά ψευδής. Για παράδειγμα, η πρόταση "ο αριθμός 2 είναι άρτιος" είναι λογικά αληθής μια και η άρνησή της ("ο αρθμός 2 είναι περιττός") είναι λογικά ψευδής.

Υπάρχουν προτάσεις οι οποίες δεν μπορούν να χαρακτηριστούν ούτε λογικά ψευδείς ούτε λογικά αληθείς. Αυτές ονομάζονται **επαληθεύσιμες** (contingent). Για παράδειγμα, η πρόταση "ο αριθμός x είναι θετικός" είναι επαληθεύσιμη.

2.3 Συνέπεια και Συνεπαγωγή (Consequence and Entailment)

Θεωρείστε το σύνολο προτάσεων S_4={ p_1: x>2, p_2: x άρτιος, p_3: x πρώτος}. Αν δεχτούμε τις προτάσεις p_1και p_2 τότε συμπεραίνουμε την πρόταση p_4: ο x δεν είναι πρώτος, δηλαδή

την άρνηση της p_3. Αν οι προτάσεις p_1και p_2 είναι αληθείς τότε και η p_4 πρέπει να είναι αληθής. Λέμε τότε ότι η p_4 **συνάγεται** από τις p_1 και p_2, ή ότι είναι **συνέπεια** των p_1 και p_2. Εναλλακτικά, λέμε ότι οι p_1και p_2 **συνεπάγονται** την p_4 ή ότι μπορούμε να συμπεράνομε την p_4 από τις p_1και p_2 .
Ακόμα, από τις p_2 και p_3 μπορούμε να συμπεράνομε την πρόταση p_5: x=2 και από τις p_1 και p_3 μπορούμε να συμπεράνομε την πρόταση p_6: x περιττός.

2.4 Εξαγωγή Συμπερασμάτων, Εγκυρότητα, Συνεπαγωγή, Ισοδυναμία (Inference, Validity, Entailment, Equivalence)

Ποια είναι η σχέση μεταξύ της εξαγωγής ενός συμπεράσματος και της έννοιας της συνεπαγωγής; Δεδομένου ενός συνόλου προτάσεων $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, μπορούμε να εξάγουμε ως συμπέρασμα την πρόταση c αν η c είναι συνέπεια των $p_1, p_2, \ldots, p_n$, δηλαδή αν οι $p_1, p_2, \ldots, p_n$ συνεπάγονται την c.
Συμβολισμός: η εξαγωγή συμπεράσματος c από υποθέσεις $p_1, p_2, \ldots, p_n$ συμβολίζεται ως $p_1, p_2, \ldots, p_n$ / c ή ως

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ . \\ . \\ p_n \\ \hline c \end{array}$$

Προσοχή : συμπεραίνουμε ότι η c είναι αληθής βάσει της υπόθεσης ότι οι $p_1, p_2, \ldots, p_n$ είναι αληθείς και ότι συνεπάγονται την c.

Αν το συμπέρασμα c πράγματι συνάγεται από τις προτάσεις $p_1, p_2, \ldots, p_n$, τότε η εξαγωγή συμπεράσματος ονομάζεται **έγκυρη** (valid). Αν οι $p_1, p_2, \ldots, p_n$ και c είναι αληθείς προτάσεις, τότε η εξαγωγή συμπεράσματος ονομάζεται **ορθή** (sound). Για να δηλώσομε ότι η εξαγωγή συμπεράσματος $p_1, p_2, \ldots, p_n$ / c είναι έγκυρη χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $p_1, p_2, \ldots, p_n \models c$.

Συχνά μας ενδιαφέρει η έγκυρη εξαγωγή συμπερασμάτων τα οποία γνωρίζομε ότι δεν είναι ορθά. Αυτό συμβαίνει όταν ενδιαφερόμαστε για συλλογισμούς του τύπου “ αν ο κόσμος ήταν ....., τότε .....”.

<u>**Ορισμός:**</u> Η εξαγωγή συμπεράσματος $p_1, p_2, \ldots, p_n$ / c είναι **έγκυρη** εφόσον δεν είναι δυνατόν για τις $p_1, p_2, \ldots, p_n$ να είναι συγχρόνως αληθείς και η c να είναι ψευδής. Είναι **ορθή** αν είναι έγκυρη και οι $p_1, p_2, \ldots, p_n$, c είναι όλες αληθείς.

<u>Παραδείγματα:</u>
1. Η εξαγωγή συμπεράσματος

$$\begin{array}{l} p_1 : q > 2 \\ p_2 : q \text{ άρτιος} \\ \hline c: q \text{ μη πρώτος} \end{array}$$

είναι έγκυρη αλλά μη-ορθή.

2. Η εξαγωγή συμπεράσματος

p_1 : 6 >2
p_2 : 6 άρτιος

---

c: 6 μη πρώτος

είναι έγκυρη και ορθή.

3. Η εξαγωγή συμπεράσματος

p_1 : ο αριθμός 3 είναι πρώτος
p_2 : ο αριθμός 5 είναι πρώτος

---

c: όλοι οι περιττοί είναι πρώτοι

είναι μη-έγκυρη και μη-ορθή.

Από μια έγκυρη συνεπαγωγή $p_1, p_2, \ldots, p_n \models c$ μπορούμε να εξάγομε μια λογικά αληθή πρόταση. Πώς; Σχηματίζομε την πρόταση $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \rightarrow c$.

Ισοδυναμία

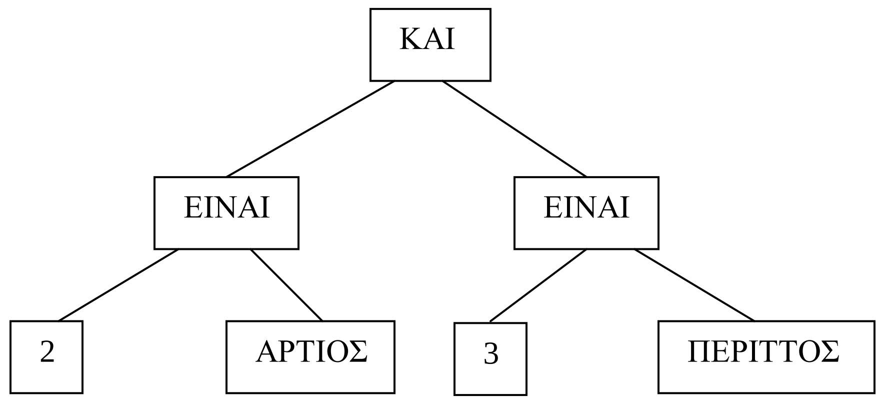
Η σχέση A |= B δεν είναι συμμετρική, δηλαδή εν γένει δεν ισχύσει και B |= A. Για παράδειγμα, ο x είναι πολλαπλάσιο του 4 |= ο x είναι άρτιος, αλλά x είναι άρτιος |≠ ο x είναι πολλαπλάσιο του 4. Για άλλες προτάσεις ισχύει A |= B αν και μόνο αν B |= A. Για παράδειγμα, ο x είναι πολλαπλάσιο του 2 |= ο x είναι άρτιος και x είναι άρτιος |= ο x είναι πολλαπλάσιο του 2.

<u>Ορισμός</u>: Αν για δύο προτάσεις A και B ισχύει ότι A |= B και B |= A, τότε οι προτάσεις A και B λέγονται **ισοδύναμες**.

Δύο ισοδύναμες προτάσεις είναι συγχρόνως αληθείς ή συγχρόνως ψευδείς. Η ισοδυναμία των προτάσεων A και B συμβολίζεται ως $A \equiv B$.

3. Προτασιακός Λογισμός (Propositional Calculus)

Ο Προτασιακός Λογισμός (ΠΛ) ασχολείται με τη δομή των προτάσεων και τη χρήση τους στην εξαγωγή συμπερασμάτων. Για παράδειγμα, θεωρείστε την πρόταση s: “ο αριθμός 2 είναι άρτιος και ο αριθμός 3 είναι περιττός”. Η s μπορεί να θεωρηθεί ως ερμηνεία της πρότυπης πρότασης “ο X είναι A και ο Y είναι B” ή ακόμα και της πρότασης “p και q”. Η δομή της πρότασης μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα δέντρο της μορφής



Αν η πρόταση θεωρηθεί ερμηνεία της πρότασης “p και q” τότε περιγράφεται σαν συνδυασμός δύο προτάσεων που συνδέονται με το συνδετικό “και” (σύζευξη). Η τιμή αλήθειας της s εξαρτάται από τις τιμές αλήθειας των p και q. Συνδετικά που χρησιμοποιούνται για το σχηματισμό προτάσεων και για τα οποία ισχύει ότι η τιμή αλήθειας της σύνθετης πρότασης εξαρτάται μόνο από τις τιμές αλήθεαις των προτάσεων που συντίθενται είναι αυτά που μας ενδιαφέρουςν στον Προτασιακό Λογισμό.[1] Για ποιά συνδετικά δεν ισχύει αυτό; Αν το συνδετικό “διότι” ή το συνδετικό “ενώ” είχε χρησιμοποιηθεί στη θέση του “και” , τότε αυτό δεν θα ίσχυε.

3.1 Σημασιολογικοί Κανόνες

Για την απόδοση τιμών αλήθειας στις προτάσεις του ΠΛ χρησιμοποιούνται *σημασιολογικοί κανόνες*:

(α) **Σημασιολογικός κανόνας σύζευξης**: Μια ερμηνεία ικανοποιεί την πρόταση $A \wedge B$ αν και μόνο αν ικανοποιεί και την A και την B.
Ο κανόνας μπορεί να αναπαρασταθεί και μέσω ενός **πίνακα αλήθειας**, ο οποίος έχει ως στήλες τις προτάσεις A, B και $A \wedge B$ και ως γραμμές τους δυνατούς συνδυασμούς τιμών αλήθειας των A και B. Οι τιμές αλήθειας μιας πρότασης συμβολίζονται με α και ψ (αληθής και ψευδής αντίστοιχα).

A	B	$A \wedge B$
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	ψ
ψ	ψ	ψ

[1] Τέτοια συνδετικά ονομάζονται truth-functional.

(β) **Σημασιολογικός κανόνας διάζευξης**: Μια ερμηνεία ικανοποιεί την πρόταση $A \vee B$ αν και μόνο αν ικανοποιεί τουλάχιστον μία από τις A και B. Ισοδύναμα, μια ερμηνεία καθιστά την πρόταση $A \vee B$ ψευδή αν και μόνο αν καθιστά και την A και την B ψευδείς. Πίνακας αλήθεας διάζευξης:

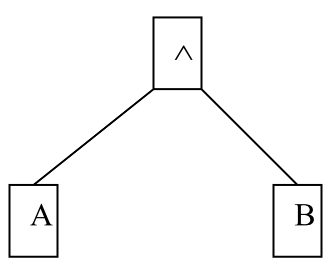
A	B	$A \vee B$
α	α	α
α	ψ	α
ψ	α	α
ψ	ψ	ψ

(γ) **Σημασιολογικός κανόνας αποκλειστικής διάζευξης**: Μια ερμηνεία ικανοποιεί την πρόταση $A \oplus B$ αν και μόνο αν ικανοποιεί ακριβώς μία από τις A και B. Πίνακας αλήθεαις αποκλειστικής διάζευξης:

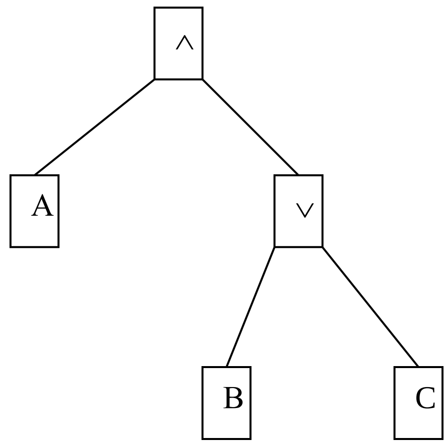
A	B	$A \oplus B$
α	α	ψ
α	ψ	α
ψ	α	α
ψ	ψ	ψ

3.2 Δομή Προτάσεων

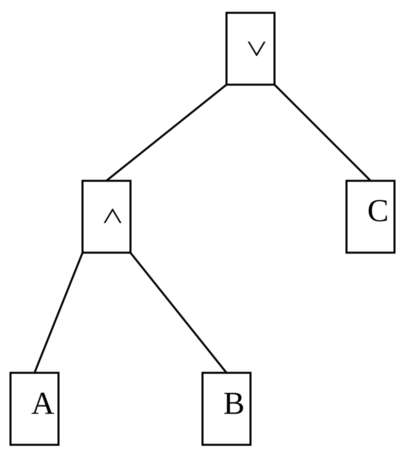
Η σύζευξη $A \wedge B$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως το δέντρο



Οι A και B μπορεί να είναι σύνθετες προτάσεις. Έτσι η πρόταση $A \wedge (B \vee C)$ αναπαριστάται ως το δέντρο



Η χρήση των παρενθέσεων είναι απαραίτητη για να αναπαριστάται με ακρίβεια η δομή της πρότασης. Για παράδειγμα, η πρόταση $A \wedge (B \vee C)$ είναι διαφορετική από την πρόταση $(A \wedge B) \vee C$. Η τελευταία αναπαριστάται από το δέντρο



Αν δεν χρησιμοποιηθούν παρενθέσεις, ποιά δομή αντιστοιχεί στην πρόταση $A \wedge B \vee C$; Η πρόταση $A \wedge (B \vee C)$ είναι μια σύζευξη προτάσεων μια από τις οποίες είναι μια διάζευξη, ενώ η πρόταση $(A \wedge B) \vee C$ είναι μια διάζευξη προτάσεων μια από τις οποίες είναι μια σύζευξη.

Κάθε συνδετικό έχει ένα **πεδίο ή ακτίνα** (scope). Το πεδίο ενός συνδετικού το σύνολο των κόμβων του δέντρου αναπαράστασης της πρότασης οι οποίοι “κρέμονται” από τον κόμβο του συνδετικού. Για παράδειγμα, το πεδίο του συνδετικού $\vee$ στην πρόταση $A \wedge (B \vee C)$ είναι το $\{B, C\}$, ενώ το πεδίο του συνδετικού $\wedge$ είναι το $\{A, B \vee C\}$.

Αντικατάσταση (substitution). Οποιαδήποτε σύζευξη (ή διάζευξη) μπορεί να θεωρηθεί ότι προέρχεται από την πρότυπη πρόταση $p \wedge q$ (αντίστοιχα $p \vee q$) όπου οι p, q αντικαθίστανται από τις κατάλληλες προτάσεις. Για παράδειγμα, η πρόταση $(A \vee (B \wedge C)) \wedge (B \vee D)$ προέρχεται από την $p \wedge q$ με αντικατάσταση του p με $(A \vee (B \wedge C))$ και του q με $(B \vee D)$. Συχνά μάλιστα χρησιμοποιούνται οι ίδιες πρότυπες μεταβλητές στην πρότυπη πρόταση και στις εκφράσεις που αντικαθιστούν τις πρότυπες μεταβλητές. Για παράδειγμα, αν στην πρόταση $A \wedge B$ ανατικαταστήσομε το A με $(A \vee (B \wedge C))$ και το B με $(B \vee D)$ προκύπτει η πρόταση $(A \vee (B \wedge C)) \wedge (B \vee D)$.

Προσοχή! Οι αντικαταστάσεις των προτύπων μεταβλητών πρέπει να γίνονται συγχρόνως. Αν στο προηγούμενο παράδειγμα οι αντικαταστάσεις γίνουν διαδοχικά η πρόταση που προκύπτει είναι η $A \vee ((B \vee D) \wedge C) \wedge (B \vee D)$ η οποία δεν είναι ισοδύναμη της $(A \vee (B \wedge C)) \wedge (B \vee D)$.

Η αντικατάσταση του X με Y συμβολίζεται ως X/Y. Η ταυτόχρονη αντικατάσταση των $X_1, X_2, ..., X_n$ με $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ συμβολίζεται ως $\{X_1/Y_1, X_2/Y_2, ...,X_n/Y_n\}$. Αν E είναι μια πρόταση του ΠΛ και j μια αντικατάσταση, τότε Ej συμβολίζει την πρόταση που προκύπτει από την εφαρμογή της αντικατάστασης j στην E. Π.χ., αν E είναι η πρόταση $A \wedge B$ και $j = \{A / A \vee (B \wedge C), B / B \vee D\}$, τότε Ej είναι η πρόταση $(A \vee (B \wedge C)) \wedge (B \vee D)$.

Επιστρέφοντας στην αναπαράσταση της δομής των προτάσεων ως δέντρα, το **βάθος** μια δομής είναι το μήκος του μακρύτερου μονοπατιού από τη ρίζα του δέντρου στα φύλλα. Το βάθος στο οποίο μια υποπρόταση παρουσιάζεται μέσα στη δομή μιας πρότασης ορίζεται ως το μήκος του μονοπατιού από τον κόμβο του κύριου συνδετικού της υποπρότασης στην ρίζα της πρότασης.

Παραδείγματα:

- Το βάθος της πρότασης A είναι 0
- Το βάθος της πρότασης $A \wedge B$ είναι 1
- Το βάθος της πρότασης $A \vee (B \wedge C)$ είναι 2
- Το βάθος της πρότασης $A \wedge ((B \wedge (C \vee D)) \vee E)$ είναι 4
- Η πρόταση $C \vee D$ εμφανίζεται σε βάθος 3 στην πρόταση $A \wedge ((B \wedge (C \wedge D)) \vee E)$, ενώ η πρόταση E εμφανίζεται σε βάθος 2

3.3 Ισοδυναμίες του Προτασιακού Λογισμού

Οι παρακάτω είναι μερικές από τις βασικές ισοδυναμίες του ΠΛ για προτάσεις που χρησιμοποιούν τα συνδετικά $\wedge$ και $\wedge$:

(1α) $A \wedge B \equiv B \wedge A$ (μεταθετικότητα του $\wedge$)
(1β) $A \vee B \equiv B \vee A$ (μεταθετικότητα του $\vee$)
(2α) $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$ (προσεταιριστικότητα του $\wedge$)
(2β) $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$ (προσεταιριστικότητα του $\vee$)
(3α) $A \wedge A \equiv A$ (αυτοπάθεια του $\wedge$)

(3β) $A \vee A \equiv A$ (αυτοπάθεια του $\vee$)
(4α) $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (επιμερισμός του $\wedge$ πάνω στο $\vee$)
(4β) $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (επιμερισμός του $\vee$ πάνω στο $\wedge$)
(5α) $A \wedge (A \vee B) \equiv A$ (απορρόφηση του $\wedge$)
(5β) $A \vee (A \wedge B) \equiv A$ (απορρόφηση του $\vee$)

Οι ισοδυναμίες αυτές μπορούν να επαληθευτούν με χρήση πινάκων αλήθειας. Για παράδειγμα, ο πίνακας αλήθειας της ισοδυναμίας (4α) είναι ο ακόλουθος.

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
α	α	α	α	α	α	α	α
α	α	ψ	α	α	α	ψ	α
α	ψ	α	α	α	ψ	α	α
α	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ
ψ	α	α	α	ψ	ψ	ψ	ψ
ψ	α	ψ	α	ψ	ψ	ψ	ψ
ψ	ψ	α	α	ψ	ψ	ψ	ψ
ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ

Με παρόμοιο τρόπο επαληθεύονται και οι υπόλοιπες ισοδυναμίες.

Βάσει των ιδοσυναμιών του Προτασιακού Λογισμού για τις προτάσεις που χρησιμοποιούν τα συνδετικά $\wedge$ και $\wedge$, μπορούμε να αποδείξομε και άλλες ισοδυναμίες χωρίς να κατασκευάσομε πίνακες αλήθειας. Για παράδειγμα, θέλομε να αποδείξομε την ακόλουθη ισοδυναμία:

(4γ) $(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C)$

Ξεκινώντας από το αριστερό μέλος της ισοδυναμίας,

$(A \wedge B) \vee C \equiv C \vee (A \wedge B)$ (από την (1β))
$\equiv (C \vee A) \wedge (C \vee B)$ (από την (4β))
$\equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C)$ (από την (1β))

Παρόμοια μπορούμε να αποδείξομε την (4δ) $(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$

Η πρότταση $(A \wedge B) \vee C$ προέρχεται από την $A \vee B$ μέσω της αντικατάστασης $\{A / A \wedge B, B / C\}$. Αν εφαρμόσομε την ίδια αντικατάσταση στην ισοδύναμη πρόταση $B \vee A$ παίρνομε την πρόταση $C \vee (A \wedge B)$. Εν γένει, αν η ίδια αντικατάσταση εφαρμόζεται σε δύο ισοδύναμες προτάσεις, οι προτάσεις που προκύπτουν είναι επίσης ισοδύναμες.

<u>Παράδειγμα</u>: Αποδείξτε την ισοδυναμία

$$(A \wedge B) \vee (C \wedge D) \equiv (A \vee C) \wedge (A \vee D) \wedge (B \vee C) \wedge (B \vee D)$$

$$
\begin{aligned}
(A \wedge B) \vee (C \wedge D) &\equiv ((A \wedge B) \vee C) \wedge ((A \wedge B) \vee D) \text{ (από την (4α))} \\
&\equiv ((A \vee C) \wedge (B \vee C)) \wedge ((A \vee D) \wedge (B \vee D)) \text{ (από την (4β))} \\
&\equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C) \wedge (A \vee D) \wedge (B \vee D) \text{ (από την (2α))} \\
&\equiv (A \vee C) \wedge (A \vee D) \wedge (B \vee C) \wedge (B \vee D) \text{ (από την (1α))}
\end{aligned}
$$

Το παράδειγμα παρουσιάζει μια άλλη μορφή επιμερισμού, όπου η διάζευξη δύο συζεύξεων είναι ισοδύναμη με τη σύζευξη τεσσάρων διαζεύξεων.

Παράδειγμα: Αποδείξτε την ισοδυναμία

$$(A \wedge B) \vee (B \wedge C) \vee (C \wedge A) \equiv (A \vee B) \wedge (B \vee C) \wedge (C \vee A)$$

$$
\begin{aligned}
(A \wedge B) \vee (B \wedge C) \vee (C \wedge A) &\equiv (A \wedge B) \vee (B \wedge C) \vee (A \wedge C) \text{ (από την (1β))} \\
&\equiv (A \wedge B) \vee ((B \vee A) \wedge C) \text{ (από την (4δ))} \\
&\equiv ((A \wedge B) \vee (B \vee A)) \wedge ((A \wedge B) \vee C) \text{ (από την (4β))} \\
&\equiv ((A \wedge B) \vee (A \vee B)) \wedge ((A \wedge B) \vee C) \text{ (από την (1β))} \\
&\equiv (((A \wedge B) \vee A) \vee B) \wedge ((A \wedge B) \vee C) \text{ (από την (2β))} \\
&\equiv (A \vee B) \wedge ((A \wedge B) \vee C) \text{ (από την (5β))} \\
&\equiv (A \vee B) \wedge ((A \vee C) \wedge (B \vee C)) \text{ (από την (4α))} \\
&\equiv (A \vee B) \wedge (B \vee C) \wedge (C \vee A) \text{ (από την (1β))}
\end{aligned}
$$

3.4 Κανονικές Μορφές (Normal Forms)

Το τελευταίο παράδειγμα έδειξε ότι μια σύζευξη διαζεύξεων είναι ισοδύναμη με μια διάζευξη συζεύξεων. Εν γένει, οποιαδήποτε πρόταση χρησιμοποιεί μόνο $\wedge$ και $\vee$, είναι ισοδύναμη με μια σύζευξη διαζεύξεων και μια διάζευξη συζεύξεων. Αυτές οι προτάσεις αντιστοιχούν στην **συζευκτική κανονική μορφή (conjunctive normal form)** και στην **διαζευκτικη κανονική μορφή (disjunctive normal form)** αντίστοιχα. Πρίν τις ορίσουμε αυστηρά χρειαζόμαστε κάποιους ορισμούς:

Ορισμός: Ένα **γράμμα** (literal) είναι οποιαδήποτε πρότυπη μεταβλητή. Ένας **ελάχιστος όρος** (minterm) είναι ένα γράμμα ή η σύζευξη γραμμάτων. Ένας **μέγιστος όρος** (maxterm) είναι ένα γράμμα ή η διάζευξη γραμμάτων.

Για παράδειγμα, το A είναι γράμμα και συγχρόνως μέγιστος και ελάχιστος όρος. Το $A \wedge B \wedge C$ είναι ελάχιστος όρος ενώ το $A \wedge A$ δεν είναι. Το $A \vee B$ είναι μέγιστος όρος ενώ το $A \vee A$ δεν είναι.

Ορισμός Ένας ελάχιστος (μέγιστος) όρος M_1 **απορροφά** έναν άλλο ελάχιστο (μέγιστο) όρο M_2, αν κάθε γράμμα του M_1 είναι επίσης στο M_2.

Για παράδειγμα, κάθε μέγιστος (ελάχιστος) όρος απορροφά τον εαυτό του. Το A απορροφά το $A \vee C$ και το $A \vee C$ απορροφά το $A \vee B \vee C$.

Ορισμός Μια πρόταση είναι σε Διαζευκτική Κανονική Μορφή (DNF) αν είναι μια διάζευξη από ελάχιστους όρους κανένας από τους οποίους δεν απορροφά κανέναν άλλο. Μια πρόταση είναι σε Συζευκτική Κανονική Μορφή (CNF) αν είναι μια σύζευξη από μέγιστους όρους κανένας από τους οποίους δεν απορροφά κανένα άλλο.

Για παράδειγμα

- η πρόταση $(A \wedge B) \vee (A \wedge D \wedge E) \vee C$ είναι σε DNF.
- η $(A \wedge B) \vee (A \wedge B \wedge C) \vee D$ δεν είναι σε DNF.
- η $A \wedge B \wedge C$ είναι σε DNF και CNF.
- η $A \vee B \vee C$ είναι σε DNF και CNF.
- οι A, B, $A \wedge B$, $A \vee B$ είναι σε DNF και CNF.
- η $A \vee (B \wedge C)$ είναι σε DNF αλλά όχι σε CNF.

3.4.1 Αλγόριθμος Μετατροπής σε DNF

Input: μια πρόταση του Προτασιακού Λογισμού που χρησιμοποιεί μόνο $\wedge, \vee$
Output: η πρόταση σε DNF

(0) Σε αυτό το βήμα αφαιρούμε μη-απαραίτητες παρενθέσεις (Π.χ. $(A \vee B) \vee C$ γράφεται ως $A \vee B \vee C$).
(1) Βρίσκουμε τη σύζευξη η οποία βρίσκεται σε μεγαλύτερο βάθος και η οποία περιέχει τουλάχιστον μια διάζευξη. Αν δεν υπάρχει τέτοια υποπρόταση, πηγαίνουμε στο βήμα (3). Αν υπάρχουν περισσότερες από μία, διαλέγουμε μία από αυτές,
(2) Στην σύζευξη που επιλέγεται στο βήμα (1) εφαρμόζουμε την επιμεριστικότητα της σύζευξης (ισοδυναμία 4α ή 4γ) και αφαιρούμε περιττές παρενθέσεις. Επιστρέφουμε στο βήμα (1).
(3) Απλοποιούμε κάθε σύζευξη όσο γίνεται χρησιμοποιώντας την ισοδυναμία της αυτοπάθειας (ισοδυναμία 5α).
(4) Αν υπάρχουν συζεύξεις που χρησιμοποιούν τα ίδια γράμματα, κρατάμε μόνο μία από αυτές.
(5) Παραλείπουμε κάθε σύζευξη η οποία περιέχει όλα τα γράμματα μιας άλλης σύζευξης (δηλαδή απορροφάται από μία άλλη σύζευξη).

Παράδειγμα Ας εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο στην πρόταση

$$(A \vee B) \wedge ((B \wedge (C \vee ((C \vee D) \wedge A))) \vee C)$$

Η πρόταση δεν περιέχει μη-απαραίτητες παρενθέσεις. Στο βήμα (1), επιλέγουμε την σύζευξη $(C \vee D) \wedge A$ σαν αυτή που βρίσκεται σε μεγαλύτερο βάθος και περιέχει τουλάχιστον μια διάζευξη. Στο βήμα (2), εφαρμόζουμε την ισοδυναμία 4^{α}, από την οποία προκύπτει η πρόταση

$$(A \vee B) \wedge ((B \wedge (C \vee (C \wedge A) \vee (D \wedge A))) \vee C)$$

Στην επόμενη επανάληψη, επιλέγουμε την πρόταση $B \wedge (C \vee (C \wedge A) \vee (D \wedge A))$ σαν αυτήπου βρίσκεται σε μεγαλύτερο βάθος και περιέχει τουλάχιστον μια διάζευξη. Στο βήμα (2), εφαρμόζουμε την ισοδυναμία 4α, από την οποία προκύπτει η πρόταση

$$(A \vee B) \wedge ((B \wedge C) \vee (B \wedge C \wedge A) \vee (B \wedge D \wedge A) \vee C)$$

Στην επόμενη επανάληψη, επιλέγουμε ολόκληρη την πρόταση σαν αυτή που βρίσκεται σε μεγαλύτερο βάθος και περιέχει τουλάχιστον μια διάζευξη. Στο βήμα (2), εφαρμόζουμε την ισοδυναμία 4α, από την οποία προκύπτει η πρόταση

$$(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C \wedge A) \vee (A \wedge B \wedge D \wedge A) \vee (A \wedge C) \vee$$
$$(B \wedge B \wedge C) \vee (B \wedge B \wedge C \wedge A) \vee (B \wedge B \wedge D \wedge A) \vee (B \wedge C)$$

Στο βήμα (3), απλοποιούμε τις συζεύξεις που προέκυψαν από τα προηγούμενα βήματα. Το αποτέλεσμα είναι η πρόταση :

$$(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge D) \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \vee$$
$$(B \wedge C \wedge A) \vee (B \wedge D \wedge A) \vee (B \wedge C)$$

Από το βήμα (4) προκύπτει η πρόταση:

$$(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge D) \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

Τέλος, από το βήμα (5) η πρόταση στην τελική της μορφή είναι η

$$S: \quad (A \wedge B \wedge D) \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

Η ισοδυναμία της αρχικής πρότασης και της πρότασης που προκύπτει από την εφαρμογή του αλγορίθμου μπορεί να επιβεβαιωθεί με την κατασκευή πινάκων αληθείας για τις δύο προτάσεις. Η κατασκευή του πίνακα αληθείας για την DNF μορφή της πρότασης είναι πολύ απλούστερη από την αντίστοιχη κατασκευή για την αρχική πρόταση :

A	B	C	D	A ∧ B ∧ D	A ∧ C	B ∧ C		S
α	α	α	α	α	α	α		α
α	α	α	ψ	ψ	α	α		α
α	α	ψ	α	α	ψ	ψ		α
α	α	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ		ψ
α	ψ	α	α	ψ	α	ψ		α
α	ψ	α	ψ	ψ	α	ψ		α
α	ψ	ψ	α	ψ	ψ	ψ		ψ
α	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ		ψ
ψ	α	α	α	ψ	ψ	α		α
ψ	α	α	ψ	ψ	ψ	α		α
ψ	α	ψ	α	ψ	ψ	ψ		ψ
ψ	α	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ		ψ
ψ	ψ	α	α	ψ	ψ	ψ		ψ
ψ	ψ	α	ψ	ψ	ψ	ψ		ψ
ψ	ψ	ψ	α	ψ	ψ	ψ		ψ
ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ		ψ

Κάθε σύζευξη της S αντιστοιχεί σε ένα σύνολο γραμμών του πίνακα.

Μετατροπή προτάσεων σε CNF : η μετατροπή γίνεται αν στον αλγόριθμο αντικαταστήσουμε 'σύζευξη' με 'διάζευξη' και αντίστροφα.

Οι CNF και DNF μορφές είναι δυικές (dual) μορφές. Αν σε μια ισοδυναμία αντικαταστήσουμε 'σύζευξη' με ΄διάζευξη' και αντίστροφα, η ισοδυναμία παραμένει.

Για παράδειγμα, γνωρίζουμε ότι ισχύει η ισοδυναμία $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$. Αν αντικαταστήσουμε $\wedge$ με $\vee$ και αντίστροφα, προκύπτει η ισοδυναμία $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ η οποία επίσης ισχύει.

3.5 Άρνηση (Negation)

Όπως έχουμε ήδη δει, για οποιαδήποτε πρόταση του Προτασιακού Λογισμού η οποία χρησιμοποιεί τα συνδετικά $\wedge$, $\vee$ μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν πίνακα αλήθειας. Το αντίστροφο μπορεί να γίνει Αν μας δίνεται ένας πίνακας αλήθειας, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια πρόταση που αντιστοιχεί σε αυτό.

Παράδειγμα : Θεωρείστε τον παρακάτω πίνακα αλήθειας

A	B	C		X
α	α	α		α
α	α	ψ		ψ
α	ψ	α		α
α	ψ	ψ		ψ
ψ	α	α		α
ψ	α	ψ		ψ
ψ	ψ	α		ψ
ψ	ψ	ψ		ψ

Η X είναι αληθής όταν η $A \wedge C$ ή $B \wedge C$ είναι αληθής. Η X θα μπορούσε να είναι η πρόταση $(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ ή $(A \vee B) \wedge C$.

Έστω τώρα ο πίνακας αληθείας:

A	B	X
α	α	ψ
α	ψ	ψ
ψ	α	ψ
ψ	ψ	α

Υπάρχει πρόταση που να εκφράζεται από αυτόν τον πίνακα ; Εύκολα φαίνεται ότι δεν υπάρχει πρόταση που να χρησιμοποιεί μόνο τα συνδετικά $\wedge$ και $\vee$. Αν υπήρχε θα έπρεπε να είναι ισοδύναμη με μία από τις προτάσεις A, B, $A \wedge B$, $A \vee B$ (σε DNF). Καμία από αυτές δεν έχει αυτό τον πίνακα αλήθειας.

Χρειαζόμαστε ένα καινούργιο συνδετικό, αυτό της άρνησης (negation).
Σύμβολο : $\neg$.
<u>Σημασιολογικός Κανόνας Άρνησης</u> : μια ερμηνεία ικανοποιεί την πρόταση $\neg A$ αν και μόνο αν καθιστά την A ψευδή.

Πίνακας Αλήθειας

A		$\neg A$
α		ψ
ψ		α

Τώρα μπορούμε να εκφράσουμε την πρόταση X του παρακάτω πίνακα :

A	B		X
α	α		ψ
α	ψ		ψ
ψ	α		ψ
ψ	ψ		α

Η X είναι $\neg A \wedge \neg B$.
Από κάθε πίνακα αληθείας μπορεί να κατασκευαστεί μια πρόταση χρησιμοποιώντας τα συνδετικά $\wedge$, $\vee$ και $\neg$.

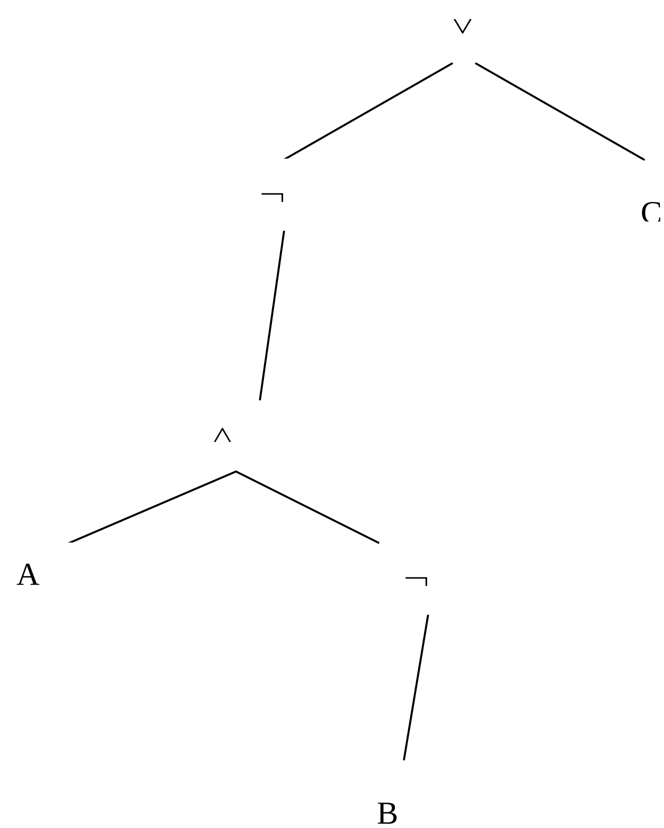
<u>Βασικές Ισοδυναμίες</u>

(1) $\neg\neg A \equiv A$ (απαλοιφή διπλής άρνησης)
(2α) $\neg (A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$ (νόμος De Morgan)
(2β) $\neg (A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ (νόμος De Morgan)
(3) $A \oplus B \equiv (A \vee B) \wedge \neg (A \wedge B)$ (αποκλειστική διάζευξη).

Επίσης ισχύει ότι $X \equiv Y$ αν και μόνο αν $\neg X \equiv \neg Y$. Από την ισοδυναμία (2α) προκύπτει τότε ότι: $\neg\neg(A \wedge B) \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$ και από την (1) : $(A \wedge B) \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$. Άρα η σύζευξη μπορεί να οριστεί χρησιμοποιώντας $\neg$ και $\vee$.
Ανάλογα από την (2β): $\neg\neg(A \vee B) \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$ και από την (1) : $(A \vee B) \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$. Άρα η διάζευξη μπορεί να οριστεί χρησιμοποιώντας $\neg$ και $\wedge$.

Βασικά συνθετικά : $\{\neg, \vee\}$ ή $\{\neg, \wedge\}$
Προτάσεις που περιλαμβάνουν άρνηση μπορούν να επίσης να αναπαρασταθούν με δένδρα.

Για παράδειγμα η πρόταση $\neg(A \wedge \neg B) \vee C$ αναπαραστάται από το ακόλουθο δένδρο:



Οι έννοιες του ‘πεδίου’ και του ‘βάθους’ ορίζονται όπως πριν.

3.6 Συνεπαγωγή στον Προτασιακό Λογισμό

Όπως ειπώθηκε στην εισαγωγή, μια πρόταση Α συνάγεται από ένα σύνολο προτάσεων Σ αν κάθε ερμηνεία που ικανοποιεί τις προτάσεις του Σ ικανοποιεί και την Α. Πως μπορούμε να δείξουμε ότι $\{A \vee B, \neg A\} \models B$.

Με τη βοήθεια πινάκων αληθείας. Κάθε γραμμή ενός πίνακα είναι και μια ερμηνεία.

A	B		$A \vee B$	$\neg A$		B
α	α		α	ψ		α
α	ψ		α	ψ		ψ
ψ	α		α	α		α
ψ	ψ		ψ	α		ψ

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι κάθε ερμηνεία που ικανοποιεί τις $A \vee B$ και $\neg A$ ικανοποιεί και την Β. Επομένως $\{A \vee B, \neg A\} \models B$.

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να εξετάσουμε αν $\{A \vee B, A\} \models \neg B$.

A	B	$A \vee B$	A		$\neg B$
α	α	α	α		ψ
α	ψ	α	α		α
ψ	α	α	ψ		ψ
ψ	ψ	ψ	ψ		α

Υπάρχει η ερμηνεία που καθιστά αληθείς τις υποθέσεις αλλά ψευδές το συμπέρασμα. Άρα η εξαγωγή συμπεράσματος δεν είναι έγκυρη.

Εν γένει, A, B/C είναι ισοδύναμο με την $A \wedge B$ / C υπό την έννοια ότι και οι δύο είναι έγκυρες ή μη έγκυρες. Πιο γενικά: $P_1, \ldots, P_n$ / C είναι έγκυρη αν και μόνο αν $P_1 \wedge \ldots \wedge P_n$ / C είναι έγκυρη.

3.7 Ταυτολογίες και Αντινομίες (Tautologies and Contradictions)

Με την εισαγωγή του συνδετικού της άρνησης, μπορούν να κατασκευαστούν προτάσεις οι οποίες είναι λογικά αληθείς ή λογικά ψευδείς. Οι απλούστερες τέτοιες προτάσεις είναι οι :

- $A \vee \neg A$
- $A \wedge \neg A$

Με τον παρακάτω πίνακα αληθείας

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$	$A \wedge \neg A$
α	ψ	α	ψ
ψ	α	α	ψ

Η πρόταση $A \vee \neg A$ είναι αληθής για κάθε ερμηνεία του Α ενώ η πρόταση $A \wedge \neg A$ είναι ψευδής. Άρα και οι δύο είναι ανεξάρτητες από τις ερμηνείες του Α.

Ορισμός : Μια **ταυτολογία** είναι μια πρόταση η οποία ικανοποιείται από κάθε ερμηνεία. Μια **αντινομία** είναι μια πρόταση την οποία κάθε ερμηνεία καθιστά ψευδή.

Παράδειγμα : Η πρόταση S: $A \vee (\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ είναι ταυτολογία.

$A \vee (\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \quad \equiv$
$A \vee (\neg A \wedge (B \vee \neg B)) \quad \equiv$
$(A \vee \neg A) \wedge (A \vee (B \vee \neg B))$

Οι προτάσεις $(A \vee \neg A)$ και $(B \vee \neg B)$ είναι ταυτολογίες. Άρα η S είναι ισοδύναμη με μια σύζευξη δύο προτάσεων, από τις οποίες η πρώτη είναι ταυτολογία και η δεύτερη είναι μια διάζευξη μιας ταυτολογίας με την πρόταση Α. Άρα η S είναι πάντα αληθής.

Παράδειγμα : Η πρόταση S': $A \wedge B \wedge (\neg A \vee \neg B)$ είναι αντινομία.

$A \wedge B \wedge (\neg A \vee \neg B) \equiv$
$A \wedge ((B \wedge \neg A) \vee (B \wedge \neg B)) \equiv$
$((A \wedge \neg A) \wedge B) \vee (A \wedge (B \wedge \neg B))$

Οι προτάσεις $(A \wedge \neg A)$ και $(B \wedge \neg B)$ και επομένως οι συζεύξεις στις οποίες εμφανίζονται είναι πάντα ψευδείς. Άρα και η S' είναι πάντα ψευδής.

3.8 Ταυτολογίες και Λογική Συνεπαγωγή

Μια εξαγωγή συμπεράσματος P_1, P_2, …, P_n / C όπου C είναι ταυτολογία είναι έγκυρη. Γιατί αν δεν ήταν θα έπρεπε να υπάρχει μια ερμηνεία για την οποία οι προτάσεις P_1, P_2, …, P_n να είναι αληθείς και η C ψευδής. Αλλά η C είναι ταυτολογία, επομένως πάντα αληθής. Άρα η εξαγωγή συμπεράσματος είναι έγκυρη.

Συμβολισμός Για να δηλώσουμε ότι η C είναι ταυτολογία γράφουμε |= C ενώ για να δηλώσουμε ότι είναι αντινομία γράφουμε |= ¬ C

Αν σε κάποια εξαγωγή συμπεράσματος κάποια από τις υποθέσεις είναι αντινομία, τότε η εξαγωγή συμπεράσματος είναι έγκυρη. Γιατί ?

Η απόδειξη αφήνεται σαν άσκηση.

Το συμπέρασμα είναι ότι από μια αντινομία μπορούμε να συμπεράνουμε οποιαδήποτε πρόταση.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το σύνολο $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ είναι μη-ικανοποιήσιμο. Τότε η πρόταση $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$ είναι αντινομία και η πρόταση P_1, P_2, …, P_n / C είναι έγκυρη.

Προτάσεις που δεν είναι ούτε ταυτολογίες ούτε αντινομίες λέγονται **ικανοποιήσιμες.**

Οι ταυτολογίες και οι αντινομίες μας επιτρέπουν να ορίσουμε νέους κανόνες απορρόφησης. Έστω ότι το σύμβολο **T** συμβολίζει μια ταυτολογία ενώ στο σύμβολο **F** συμβολίζει μια αντινομία. Τότε, αν S είναι οποιαδήποτε πρόταση, ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες :

- $S \wedge \mathbf{T} \equiv S$
- $S \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$
- $S \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$
- $S \vee \mathbf{F} \equiv S$

Ας θεωρήσουμε τον παρακάτω πίνακα αληθείας μιας πρότασης X. Θέλουμε να βρούμε μια πρόταση η οποία να περιγράφει την X.

	A	B	C	X
1	α	α	α	ψ
2	α	α	ψ	ψ
3	α	ψ	α	α
4	α	ψ	ψ	ψ
5	ψ	α	α	α
6	ψ	α	ψ	α
7	ψ	ψ	α	α
8	ψ	ψ	ψ	ψ

Για κάθε ερμηνεία που καθιστά την X αληθή, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια πρόταση που χρησιμοποιεί τα A,B,C. Έτσι για τις γραμμές 3,5,6 και 7 του πίνακα θα έχουμε τις προτάσεις $A \wedge \neg B \wedge C$, $\neg A \wedge B \wedge C$, $\neg A \wedge B \wedge \neg C$, $\neg A \wedge \neg B \wedge C$ αντίστοιχα. Άρα :

$$
\begin{aligned}
X \equiv\; & (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C) && \equiv \\
& (A \wedge \neg B \wedge C) \vee ((\neg A \wedge B) \wedge (C \vee \neg C)) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C) && \equiv \\
& (A \wedge \neg B \wedge C) \vee ((\neg A \wedge B) \wedge \mathbf{T}) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C) && \equiv \\
& (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B) && \equiv \\
& ((A \vee \neg A) \wedge (\neg B \wedge C)) \vee (\neg A \wedge B) && \equiv \\
& (\mathbf{T} \wedge (\neg B \wedge C)) \vee (\neg A \wedge B) && \equiv \\
& (\neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B)
\end{aligned}
$$

3.9 Συνεπαγωγή και Ισοδυναμία (Material Implication and Equivalence)

Τα σύμβολα |= και ≡ έχουν χρησιμοποιηθεί για να δηλώσουν ότι μια πρόταση του Προτασιακού Λογισμού είναι συνεπαγωγή ενός συνόλου προτάσεων και για να δηλώσουν ότι δύο προτάσεις είναι ισοδύναμες αντίστοιχα. Οι εκφράσεις $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \models A$ και $A \equiv B$ <u>δεν</u> είναι προτάσεις του Προτασιακού Λογισμού. Είναι προτάσεις <u>για</u> τον Προτασιακό Λογισμό. Υπάρχει τρόπος να δηλώσουμε ότι ένα σύνολο προτάσεων συνεπάγεται μια άλλη πρόταση γράφοντας μια πρόταση του Προτασιακού Λογισμού. Υπάρχει δηλαδή το ανάλογο του Α |= Β ;

Ακριβές ανάλογο δεν υπάρχει. Υπάρχουν όμως προτάσεις που σε πολλές περιπτώσεις είναι ισοδύναμες.

Θεωρείστε την πρόταση $\neg X \vee Y$. Αυτή έχει τον εξής πίνακα αληθείας :

X	Y	$\neg X \vee Y$
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	α
ψ	ψ	α

Άρα η $\neg X \vee Y$ είναι ψευδής μόνο όταν η Χ είναι αληθής και η Υ είναι ψευδής. Αν υποθέσουμε ότι Χ |= Υ, δεν μπορεί να ισχύει ότι η Χ είναι αληθής και η Ψ είναι ψευδής. Π.χ. αν η Χ είναι η πρόταση $\neg(A \vee B)$ και Υ είναι η πρόταση $\neg A$, τότε η πρόταση $\neg\neg(A \vee B) \vee \neg A$ έχει τον εξής πίνακα αληθείας

A	B	$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg\neg(A \vee B) \vee \neg A$
α	α	ψ	ψ	α
α	ψ	ψ	ψ	α
ψ	α	ψ	α	α
ψ	ψ	α	α	α

Άρα, αν Χ |= Υ, τότε |= $\neg X \vee Y$, δηλαδή η $\neg X \vee Y$ είναι ταυτολογία.
Αν δεν γνωρίζουμε ότι Χ |= Υ αλλά ανακαλύψουμε ότι η $\neg X \vee Y$ είναι ταυτολογία, τότε αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει ερμηνεία που να καθιστά αυτή την πρόταση ψευδή. Αν υπήρχε θα έπρεπε να καθιστά την $\neg X$ ψευδή και την Υ επίσης ψευδή, δηλαδή την Χ αληθή και την Υ ψευδή. Άρα για κάθε ερμηνεία για την οποία η Υ είναι αληθής είναι και η Υ αληθής, οπότε Χ |= Υ.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι Χ |= Υ αν και μόνο αν |= $\neg X \vee Y$.

Ο συνδυασμός των συνδετικών $\neg$, $\vee$ στην πρόταση $\neg X \vee Y$ αναπαριστάται με το σύμβολο $\rightarrow$ το οποίο ονομάζεται συνεπαγωγή [2] (material implication). Η συνεπαγωγή έχει τον εξής πίνακα αληθείας

X	Y	$X \rightarrow Y$
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	α
ψ	ψ	α

[2] Για να διακρίνουμε τα σύμβολα $\rightarrow$ και |= θα χρησιμοποιούμε τον όρο «συνεπαγωγή» για το σύμβολο $\rightarrow$ και τον όρο «λογική συνεπαγωγή» για το σύμβολο |=. $\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$ σημαίνει ότι δεν ισχύει ότι η Α είναι αληθής και η Β ψευδής. Α |= Β σημαίνει ότι δεν είναι δυνατόν να ισχύει ότι η Α είναι αληθής και η Β ψευδής.

Η πρόταση $X \rightarrow Y$ διαβάζεται ως άν Χ τότε Y' ή ‘ X μόνο αν Y'ή ‘Y αν X'. Η Χ λέγεται υπόθεση (antecedent) και η Υ λέγεται συμπέρασμα (consequent).

Όσον αφορά την περίπτωση της λογικής ισοδυναμίας : υπάρχει πρόταση του Προτασιακού Λογισμού που να εκφράζει το Α ≡ Β.

Η πρόταση $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ είναι αληθής όταν η Α και Β έχουν την ίδια τιμή αληθείας. Άρα Α ≡ Β αν και μόνο αν |= $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$, όπως φαίνεται και στον παρακάτω πίνακα αληθείας :

Α	Β	¬Α	¬Β	$A \wedge B$	$\neg A \wedge \neg B$	$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
α	α	ψ	ψ	α	ψ	α
α	ψ	ψ	α	ψ	ψ	ψ
ψ	α	α	ψ	ψ	ψ	ψ
ψ	ψ	α	α	ψ	α	α

Άρα η πρόταση $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$σχετίζεται με την Α ≡ Β με τον ίδιο τρόπο που η $A \rightarrow B$ σχετίζεται με την Α |= Β. Η πρόταση $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ γράφεται ως $A \leftrightarrow B$και το σύμβολο $\leftrightarrow$ λέγεται ισοδυναμία. Η ισοδυναμία έχει τον εξής πίνακα αληθείας :

Χ	Υ	$X \leftrightarrow Y$
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	ψ
ψ	ψ	α

Ανακεφαλαιώνοντας :

- Μια ερμηνεία ικανοποιεί την $A \rightarrow B$ αν και μόνο αν δεν ικανοποιεί την Α ή ικανοποιεί τις Α και Β.
- Μια ερμηνεία ικανοποιεί την $A \leftrightarrow B$αν και μόνο αν ή ικανοποιεί τις Α και Β ή καθιστά και τις δύο ψευδείς.

3.10 Κανονικές Μορφές

Οι αρχικοί ορισμοί των κανονικών μορφών CNF, DNF αφορούσαν προτάσεις που χρησιμοποιούν μόνο τα συνδετικά της σύζευξης και διάζευξης. Οι ορισμοί πρέπει να επεκταθούν για να συμπεριληφθεί το συνδετικό της άρνησης.

Στους νέους ορισμούς των κανονικών μορφών θα επιβάλλουμε την απαίτηση το πεδίο του συμβόλου ¬ να είναι όσο το δυνατόν μικρότερο. Βάσει αυτής της απαίτησης, μια πρόταση της μορφής $\neg(A \wedge B \wedge C)$ δεν θα μπορεί να συμμετέχει σε κάποια κανονική μορφή, αλλά η ισοδύναμή της πρόταση $\neg A \vee \neg B \vee \neg C$ θα μπορεί.

Μερικοί απαραίτητοι ορισμοί :

- Ένα <u>γράμμα</u> είναι μια πρότυπη μεταβλητή ή η άρνηση μιας πρότυπης μεταβλητής.

- Ένας ελάχιστος όρος είναι ένα γράμμα ή η σύζευξη γραμμάτων από τα οποία κανένα δεν είναι η άρνηση κάποιου άλλου ή ένα από τα σύμβολα F και T.

- Ένας ελάχιστος όρος M_1 απορροφά έναν ελάχιστο όρο M_2 αν κάθε γράμμα του M_1 είναι στον M_2. Κάθε ελάχιστος όρος απορροφά το F και απορροφάται από το T.

- Δύο ελάχιστοι όροι M_1, M_2 συνενώνονται σε έναν ελάχτιστο όρο M_3, αν οι M_1, M_2 περιέχουν όλα τα γράμματα του M_3 και έναν επιπλέον γράμμα το οποίο, στον ένα όρο είναι η άρνηση του επιπλέον γράμματος στον άλλο όρο. Κάθε γράμμα και η άρνησή του συνενώνονται στον όρο T.

- Μια πρόταση είναι σε DNF αν είναι μια διάζευξη ελαχίστων όρων κανένας από τους οποίους δεν απορροφά ή δεν συνενώνεται με κανέναν άλλο.

Παραδείγματα

- Γράμματα : A, $\neg$A, B, $\neg$B

- Ελάχιστοι όροι : A, $\neg$A, $A \wedge \neg B$, F, T, όχι όμως $A \wedge B \wedge \neg B$

- Απορρόφηση : ο κάθε ένας από τους παρακάτω όρους απορροφά όλους τους επόμενους : T, A, $A \wedge C$, $A \wedge \neg B \wedge C$, F.

- Συνένωση: οι όροι $A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge D$ και $A \wedge \neg B \wedge C \wedge D$ συνενώνονται στον όρο $A \wedge \neg B \wedge D$.

- Προτάσεις σε DNF : οι προτάσεις $(A \wedge \neg B) \vee (B \wedge C \wedge \neg D) \vee (A \wedge D)$, T, F είναι σε DNF. Οι προτάσεις $(A \wedge \neg B) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (B \wedge C \wedge D)$, $(A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C)$, $A \vee F$, $B \vee T$ δεν είναι σε DNF.

Μπορούν να υπάρχουν ισοδύναμες προτάσεις σε DNF που να περιέχουν διαφορετικούς ελάχιστους όρους. Για παράδειγμα, η πρόταση (A $\wedge$ $\neg$B $\wedge$ C) $\vee$ (A $\wedge$ $\neg$B $\wedge$ $\neg$C)$\vee$ (A $\wedge$ B $\wedge$ C) δεν είναι σε DNF. Αν συνενώσουμε το πρώτο με το δεύτερο όρο προκύπτει η πρόταση $(A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B \wedge C)$ ενώ αν συνενώσουμε τον πρώτο με τον τρίτο προκύπτει η πρόταση $(A \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C)$. Οι δύο προτάσεις είναι ισοδύναμες αλλά περιέχουν διαφορετικούς ελάχιστους όρους.

Οι προτάσεις T και F κατατάσσονται στους ελάχιστους όρους ώστε ταυτολογίες και αντινομίες να μπορούν να εκφράζονται σε DNF. Αν οι T και F δεν συμπεριλαμβάνονταν τότε οι προτάσεις $A \vee \neg A$, $A \vee B \vee \neg B$, $A \vee D \vee \neg D$ θα ήταν όλες σε DNF και όλες ισοδύναμες. Αυτές απλοποιούνται στην πρόταση T. Η πρόταση F παίζει το ρόλο της DNF μορφή μιας αντινομίας.

3.10.1 Μετατροπή Προτάσεων του Π.Λ. σε DNF

Η μετατροπή γίνεται σε τρία στάδια :

(α) Τα συνδετικά $\rightarrow$ και $\leftrightarrow$ αντικαθιστώνται από ισοδύναμες εκφράσεις χρησιμοποιώντας $\neg, \wedge, \vee$ βάσει των ισοδυναμιών :

(1) $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

(2) $A \leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

(β)Ελαχιστοποιούμε το πεδίο της άρνησης με χρήση των κανόνων De Morgan:

(3) $\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \equiv \neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \ldots \vee \neg A_n$

(4) $\neg(A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n) \equiv \neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \ldots \wedge \neg A_n$

(γ) Απαλείφουμε διπλές αρνήσεις

(5) $\neg\neg A \equiv A$

Αλγόριθμος Μετατροπής Προτάσεων του Προτασιακού Λογισμού σε DNF

(1) Χρησιμοποιούμε τις ισοδυναμίες (1) και (2) για την αντικατάσταση των συνδετικών $\rightarrow$ και $\leftrightarrow$.
(2) Χρησιμοποιούμε τις ισοδυναμίες (3), (4) και (5) για να ελαχιστοποιήσουμε το πεδίο της άρνησης.
(3) Χρησιμοποιούμε την επιμεριστικότητα της σύζευξης προς τη διάζευξη για να μετατρέψουμε διαζεύξεις που εμφανίζονται μέσα στο πεδίο μιας σύζευξης σε μια διάζευξη συζεύξεων.
(4) Αφαιρούμε διπλά γράμματα από ελάχιστους όρους, διπλούς ελάχιστους όρους, αντικαθιστούμε αντινομίες με **F** και εφαρμόζουμε την απορρόφηση και συνένωση όπου είναι δυνατό.

<u>Παράδειγμα</u> : μετατροπή της πρότασης $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \leftrightarrow (A \rightarrow C)$ σε DNF.

(1) Η πρόταση είναι ισοδύναμη με

$((\neg A \vee B) \rightarrow C) \leftrightarrow (\neg A \vee C) \equiv$

$(\neg(\neg A \vee B) \vee C) \leftrightarrow (\neg A \vee C) \equiv$

$((\neg(\neg A \vee B) \vee C) \wedge (\neg A \vee C)) \vee (\neg(\neg(\neg A \vee B) \vee C) \wedge \neg(\neg A \vee C))$

(2) Στο 2^o βήμα η πρόταση μετατρέπεται ως :

$(((\neg\neg A \wedge \neg B) \vee C) \wedge (\neg A \vee C)) \vee ((\neg\neg(\neg A \vee B) \wedge \neg C) \wedge (\neg\neg A \wedge \neg C)) \equiv$

$(((A \wedge \neg B) \vee C) \wedge (\neg A \vee C)) \vee ((\neg A \vee B) \wedge \neg C \wedge A \wedge \neg C) \equiv$

(3) Στο 3^o βήμα η πρόταση μετατρέπεται ως :

$(A \wedge \neg B \wedge \neg A) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (C \wedge \neg A) \vee (C \wedge C)$

$\vee (\neg A \wedge \neg C \wedge A \wedge \neg C) \vee (B \wedge \neg C \wedge A \wedge \neg C) \equiv$

(4) Στο 4^o βήμα η πρόταση μετατρέπεται ως :

$$(A \wedge \neg B \wedge \neg A) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (C \wedge \neg A) \vee C$$
$$\vee (\neg A \wedge \neg C \wedge A) \vee (B \wedge \neg C \wedge A) \qquad \equiv$$
$$F \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (C \wedge \neg A) \vee C \vee F \vee (B \wedge \neg C \wedge A) \qquad \equiv$$
$$(A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge C) \vee C \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \qquad \equiv$$
$$C \vee (A \wedge B \wedge \neg C)$$

Ο αλγόριθμος παντά δίνει ως αποτέλεσμα μια πρόταση σε DNF αλλά όχι πάντα την απλούστερη. Αν μάλιστα η πρόταση είναι ήδη σε DNF δεν θα αλλαχθεί καθόλου από τον αλγόριθμο. Για παράδειγμα, η πρόταση $(A \wedge \neg B) \vee B$ είναι ισοδύναμη με την πρόταση $A \vee B$ αλλά ο αλγόριθμος δεν θα μετατρέψει την αρχική πρόταση.

Επίσης, η ταυτολογία $(A \to B) \to (A \to B)$ θα μετατραπεί στην DNF μορφή $(A \wedge \neg B) \vee \neg A \vee B$ αλλά όχι στην **T**.

Στον αλγόριθμο θα μπορούσε να προστεθεί και η χρήση των παρακάτω ισοδυναμιών:

- $(A \wedge \neg B) \vee B \equiv A \vee B$
- $(A \wedge B) \vee \neg B \equiv A \vee \neg B$

σαν ένα τελικό βήμα απλοποίησης το οποίο μας επιτρέπει να αφαιρέσουμε από κάποιο ελάχιστο όρο κάποιο γράμμα η άρνηση του οποίου εμφανίζεται στην πρόταση σαν ελάχιστος όρος. Και πάλι όμως δεν θα καταλήγαμε στην απλούστερη μορφή σε κάθε περίπτωση.

Δεν υπάρχει αλγόριθμος ο οποίος εγγυάται την παραγωγή της απλούστερης DNF μορφής μιας πρότασης.