ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Λογική

Δημήτρης Πλεξουσάκης

2ο μέρος σημειώσεων: Συστήματα Αποδείξεων για τον ΠΛ, Μορφολογική Παραγωγή, Κατασκευή Μοντέλων

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.

- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

4. Το Τυπικό Σύστημα Αποδείξεων του Π.Λ.

Τα θεμελιώδη συστατικά του τυπικού συστήματος αποδείξεων του Προτασιακού Λογισμού (συντομογραφικά Prop) είναι τα προτασιακά σχήματα τα οποία φτιάχνονται από τα σύμβολα ενός λεξιλογίου :

<u>Λεξιλόγιο του Prop</u>

- προτασιακές μεταβλητές : $P_O, P_1, ..., P_n$
- συνδετικά : $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- παρενθέσεις : (,)

Η σύνθεση των προτασιακών σχημάτων του Prop γίνεται με την χρήση των παρακάτω συντακτικών κανόνων:

<u>Συντακτικοί Κανόνες</u>

1. Αν P_i, P_j είναι προτασιακές μεταβλητές τότε οι $P_i, \neg P_j$, $(P_i \wedge P_j)$, $(P_i \vee P_j)$, $(P_i \rightarrow P_j)$, $(P_i \leftrightarrow P_j)$ είναι προτασιακά σχήματα.
2. Αν Σ είναι ένα προτασιακό σχήμα, τότε κάθε σχήμα που προκύπτει από την αντικατάσταση προτασιακών μεταβλητών με άλλα σχήματα είναι επίσης ένα προτασιακό σχήμα.
3. Τα μόνα προτασιακά σχήματα είναι αυτά που παράγονται από τους κανόνες (1) και (2).

<u>Παράδειγμα</u> : Δημιουργία του προτασιακού σχήματος $((P_0 \wedge (P_1 \vee P_2) \rightarrow \neg P_3)$

Από τον κανόνα (1), υπάρχει το σχήμα $(P_0 \rightarrow P_3)$. Από την αντικατάσταση $P_0 /$ $P_0 \wedge P_1$ προκύπτει το σχήμα $((P_0 \wedge P_1) \rightarrow P_3)$ και από την αντικατάσταση $\{ P_1 \;\; P_1 \vee P_2$, $P_3 / \neg P_3 \}$ προκύπτει το σχήμα $((P_0 \wedge (P_1 \vee P_2) \rightarrow \neg P_3)$.

Για να είναι πιο εύκολα αναγνώσιμες οι προτάσεις που προκύπτουν με την χρήση των συντακτικών κανόνων :

- Χρησιμοποιούμε προτασιακές μεταβλητές P, Q, R, S.
- Παραλείπουμε το ζεύγος παρενθέσεων που περικλείει ολόκληρη την πρόταση (π.χ. η $(P \wedge Q)$ γράφεται ως $P \wedge Q$ και η $((P \wedge Q) \vee R)$ γράφεται ως $(P \wedge Q) \vee R$).
- Παραλείπουμε εσωτερικές παρενθέσεις όπου είναι δυνατόν και χρησιμοποιούμε την προτεραιότητα των συνδετικών (π.χ., $P \rightarrow Q \vee R$ σημαίνει $P \rightarrow (Q \vee R)$ και όχι $(P \rightarrow Q) \vee R$).

Με βάση αυτές τις απλοποιήσεις η $((P_0 \wedge (P_1 \vee P_2) \rightarrow \neg P_3)$ γράφεται ως $P \wedge (Q \vee R) \rightarrow \neg S$.

Ο συμβολισμός BNF (Backus-Naur Form) που χρησιμοποιείται για την περιγραφή του συντακτικού των γλωσσών προγραμματισμού μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την περιγραφή του συντακτικού του Prop :

< προτασιακό σχήμα > ::= < προτασιακή μεταβλητή > |
$\neg$ < προτασιακό σχήμα > |
(< προτασιακό σχήμα > $\wedge$ < προτασιακό σχήμα >) |
(< προτασιακό σχήμα > $\vee$ < προτασιακό σχήμα >) |
(< προτασιακό σχήμα > $\rightarrow$ < προτασιακό σχήμα >) |
(< προτασιακό σχήμα > $\leftrightarrow$ < προτασιακό σχήμα >) |
(< προτασιακό σχήμα > $\vee$ < προτασιακό σχήμα >) |
< προτασιακή μεταβλητή > ::= P_0 | P_1 | ....

Με αυτό το τρόπο οποιαδήποτε έκφραση μπορεί να ελεγθεί για το αν είναι πρόταση του Prop.

4.1 Σημασιολογία του Prop

<u>Ορισμός</u> Μια ερμηνεία I είναι οποιοδήποτε υποσύνολο του συνόλου των προτασιακών μεταβλητών. Τα μέλη αυτού του συνόλου είναι αυτά που ικανοποιούνται από την ερμηνεία.

Σε μια ερμηνεία I αντιστοιχεί μια συνάρτηση ερμηνείας η οποία απεικονίζει κάθε προτασιακή μεταβλητή σε μια από τις τιμές αλήθειας α ή ψ. Η συνάρτηση ερμηνείας που αντιστοιχεί στην ερμηνεία I, απεικονίζει όλα τα μέλη του I στην τιμή α και όλα τα υπόλοιπα στην τιμή ψ.

Ο συμβολισμός $|=_I$ S ($|\neq_I$ S) χρησιμοποιείται για να δηλώσει ότι η ερμηνεία I ικανοποιεί (δεν ικανοποιεί) το προτασιακό σχήμα S. Η ικανοποίηση ενός σχήματος ορίζεται ως εξής :

- Για μια προτασιακή μεταβλητή A, $|=_I$ A ανν A $\in$ I.
- $|=_I$ $\neg$ S ανν $|\neq_I$ S
- $|=_I$ (S $\wedge$ T) ανν $|=_I$ S και $|=_I$ T .
- $|=_I$ (S $\vee$ T) ανν $|=_I$ S ή $|=_I$ T .
- $|=_I$ (S $\rightarrow$ T) ανν $|\neq_I$ S ή $|=_I$ S και $|=_I$ T .
- $|=_I$ (S $\leftrightarrow$ T) ανν $|=_I$ (S $\rightarrow$ T) και $|=_I$ (T $\rightarrow$ S).

<u>Παράδειγμα</u> : Θεωρείστε την ερμηνεία I = {P, Q}. Ελέγξτε $|=_I$ P $\vee$ R$\rightarrow\neg$Q$\wedge$S.

Από τον ορισμό της ερμηνείας I, έχουμε ότι $|=_I$ P και $|=_I$ Q. Άρα $|=_I$ P $\vee$ R και $|\neq_I$ $\neg$Q, επομένως $|=_I$ P $\vee$ R και $|\neq_I$ $\neg$Q$\wedge$S. Άρα $|\neq_I$ P $\vee$ R$\rightarrow\neg$Q$\wedge$S.

Μερικοί ακόμα ορισμοί είναι απαραίτητοι. Θεωρείστε ότι το A συμβολίζει ένα προτασιακό σχήμα και το S ένα σύνολο προτασιακών σχημάτων.

1. A ικανοποιείται από την I αν $|=_I$ A.
2. A δεν ικανοποιείται από την I αν $|\neq_I$ A.
3. S ικανοποείται από την I αν κάθε μέλος του ικανοποείται από την I.

4. S δεν ικανοποείται από την I αν τουλάχιστον ένα μέλος του δεν ικανοποιείται από την I.
5. Το S είναι ικανοποιήσιμο αν υπάρχει τουλάχιστον μια ερμηνεία που το ικανοποιεί.
6. Το S είναι μη-ικανοποιήσιμο αν δεν υπάρχει ερμηνεία που να το ικανοποιεί.
7. Το S λογικά συνεπάγεται την A αν κάθε ερμηνεία που ικανοποιεί το S ικανοποιεί και την A.
8. Δύο προτασιακά σχήματα είναι ισοδύναμα αν κάθε ερμηνεία τα ικανοποιεί ή δεν τα ικανοποιεί συγχρόνως.
9. Η A είναι ταυτολογία (|= A) αν ικανοποιείται από κάθε ερμηνεία.
10. Η A είναι αντινομία αν δεν ικανοποείται από καμία ερμηνεία.

4.2 Συστήματα Αποδείξεων για τον Προτασιακό Λογισμό

Ένα από τα πρωτεύοντα ενδιαφέροντα μας είναι να μπορούμε να διαπιστώνουμε αν μια εξαγωγή συμπεράσματος είναι έγκυρη. Έχουμε ήδη δει έναν απλό αλγόριθμο για αυτόν τον έλεγχο:

> Κατασκευάζουμε τον πίνακα αληθείας για τις υποθέσεις και το συμπέρασμα και ελέγχουμε αν υπάρχουν ερμηνείες που ικανοποιούν τις υποθέσεις και δεν ικανοποιούν το συμπέρασμα.

Ο αλγόριθμος αυτός είναι μη-αποδοτικός: αν υπάρχουν n προτασιακές μεταβλητές στις υποθέσεις και το συμπέρασμα, τότε ο πίνακας αλήθειας έχει 2^n γραμμές. Χρειαζόμαστε έναν πιο αποδοτικό αλγόριθμο ώστε να αποφεύγουμε να σχηματίζουμε πλήρεις πίνακες αλήθειας. Μας ενδιαφέρει να βρίσκουμε αν υπάρχουν γραμμές στον πίνακα για τις οποίες οι υποθέσεις είναι αληθείς αλλά το συμπέρασμα είναι ψευδές. Συνεπώς μπορούμε να αρχίσουμε από την εύρεση των ερμηνειών για τις οποίες το συμπέρασμα είναι ψευδές.

Για παράδειγμα, θεωρείστε την εξαγωγή συμπεράσματος

$$\{\ P \wedge Q \rightarrow R, S \wedge \neg Q \rightarrow P, R \rightarrow Q \wedge S \,/\, R \rightarrow P\ \}$$

Πίνακας αλήθειας για το συμπέρασμα $R \rightarrow P$:

R	P	$R \rightarrow P$
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	α
ψ	ψ	α

Από τον πίνακα φαίνεται ότι χρειάζεται να εξετάσουμε μόνο την ερμηνεία που αντιστοιχεί στη δεύτερη γραμμή. Γι αυτή την ερμηνεία ο πίνακας αλήθειας των υποθέσεων είναι ο ακόλουθος:

P	Q	R	S		$P \wedge Q \to R$	$S \wedge \neg Q \to P$	$R \to Q \wedge S$
ψ	α	α	α		α	α	α
ψ	α	α	ψ		α	α	ψ
ψ	ψ	α	α		α	ψ	ψ
ψ	ψ	α	ψ		α	α	ψ

Παρατηρούμε ότι για την ερμηνεία που αντιστοιχεί στην πρώτη γραμμή του πίνακα, οι υποθέσεις είναι αληθείς ενώ το συμπέρασμα είναι ψευδές. Άρα η εξαγωγή συμπεράσματος είναι μη-έγκυρη.

Αν κατασκευάσουμε ολόκληρο τον πίνακα αλήθειας θα χρειαζόμασταν 64 υπολογισμούς τιμών αλήθειας ενώ με την παραπάνω απλοποίηση χρειαστήκαμε μόνο 16.

Σε αυτήν την ενότητα θα εξετάσουμε τρεις μεθόδους ελέγχου εγκυρότητας οι οποίες είναι πιο αποδοτικές από τη μέθοδο των πινάκων αλήθειας στις περισσότερες των περιπτώσεων. Δυστυχώς δεν γνωρίζουμε την ύπαρξη συστήματος αποδείξεων για τον Π.Λ. το οποίο να μας εγγυάται τον έλεγχο εγκυρότητας σε χρόνο μικρότερο του εκθετικού. Επίσης δεν γνωρίζουμε ότι τέτοιο σύστημα δεν μπορεί να υπάρξει.

Τα συστήματα αποδείξεων του Π.Λ. κατατάσσονται σε δύο κατηγορίες :

- Παραγωγικά συστήματα (deduction systems): σε ένα παραγωγικό σύστημα μια εξαγωγή συμπεράσματος $P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n$ / C αποδεικνύεται έγκυρη με την παραγωγή του συμπεράσματος C από τις υποθέσεις χρησιμοποιώντας ένα σύνολο κανόνων λογισμού.
- Συστήματα Ανασκευής (refutation systems) : σε ένα σύστημα ανασκευής χρησιμοποιείται η σχέση μεταξύ εγκυρότητας και μη-ικανοποιησιμότητας : C είναι λογική συνέπεια των $P_1,\ P_2,\ \ldots, P_n$ εφόσον το σύνολο $\{P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n,\ \neg C\}$ είναι μη-ικανοποιήσιμο. Σε ένα σύστημα ανασκευής προσπαθούμε να ανασκευάσουμε την υπόθεση ότι το σύνολο $\{P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n,\ \neg C\}$ είναι ικανοποιήσιμο.

4.2.1 Σύστημα Αποδείξεων Φυσικής ή Μορφολογικής Παραγωγής (natural deduction)

Στην μορφολογική παραγωγή, η απόδειξη γίνεται με τη μορφή της παραγωγής του συμπεράσματος από τις υποθέσεις. Σε κάθε βήμα της παραγωγής, είτε γίνεται η παραδοχή μιας από τις υποθέσεις είτε χρησιμοποιείται κάποιος κανόνας για την παραγωγή ενός καινούριου προτασιακού σχήματος από σχήματα σε προηγούμενα βήματα της απόδειξης.

Χρησιμοποιούμε δύο είδη κανόνων :

- κανόνες εισαγωγής
- κανόνες απαλοιφής

Χρησιμοποιούμε έναν κανόνα από τις παραπάνω κατηγορίες για κάθε συνδετικό. Οι απλούστεροι κανόνες επιτρέπουν την μετάβαση από δεδομένα σχήματα σε νέα σχήματα.

1. **Εισαγωγή σύζευξης** : αν σε προηγούμενα βήματα της απόδειξης έχουμε εξασφαλίσει τα σχήματα Α και Β (είτε σαν υποθέσεις είτε σαν παραγωγές από άλλα σχήματα) τότε μπορούμε να συμπεράνουμε το σχήμα $A \wedge B$.

   Συμβολισμός : $\dfrac{\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}}{A \wedge B}$

2. **Απαλοιφή σύζευξης** : αν έχουμε εξασφαλίσει το σχήμα $A \wedge B$ τότε μπορούμε να εξάγουμε το Α (αριστερή απαλοιφή σύζευξης) ή το Β (δεξιά απαλοιφή σύζευξης).

   Συμβολισμός : $\dfrac{A \wedge B}{A}$ και $\dfrac{A \wedge B}{B}$

   Παράδειγμα: Αποδείξτε ότι η εξαγωγή συμπεράσματος $P \wedge Q / Q \wedge P$ είναι έγκυρη.

   (1) $P \wedge Q$ (υπόθεση)
   (2) P (από (1) και αριστερή απαλοιφή σύζευξης)
   (3) Q (από (1) και δεξιά απαλοιφή σύζευξης)
   (4) $Q \wedge P$ (από (3), (2) και εισαγωγή σύζευξης)

   Παράδειγμα: Αποδείξτε ότι η εξαγωγή συμπεράσματος $P \wedge (Q \wedge R) / (P \wedge Q) \wedge R$ είναι έγκυρη.

   (1) $P \wedge (Q \wedge R)$ (υπόθεση)
   (2) P (από (1) και αριστερή απαλοιφή σύζευξης)
   (3) $Q \wedge R$ (από (1) και δεξιά απαλοιφή σύζευξης)
   (4) Q (από (3) και αριστερή απαλοιφή σύζευξης)
   (5) R (από (3) και δεξιά απαλοιφή σύζευξης)
   (6) $P \wedge Q$ (από (2), (4) και εισαγωγή σύζευξης)
   (7) $(P \wedge Q) \wedge R$ (από (6), (5) και εισαγωγή σύζευξης)

3. **Απαλοιφή συνεπαγωγής:** $\dfrac{\begin{matrix} A \to B \\ A \end{matrix}}{B}$

4. **Εισαγωγή διάζευξης δεξιά**: $\dfrac{A}{A \vee B}$

5. **Εισαγωγή διάζευξης αριστερά**: $\dfrac{B}{A \vee B}$

6. **Απαλοιφή ισοδυναμίας αριστερά** : $\dfrac{A \leftrightarrow B \quad A}{B}$

7. **Απαλοιφή ισοδυναμίας δεξιά**: $\dfrac{A \leftrightarrow B \quad B}{A}$

8. **Απαλοιφή άρνησης** : $\dfrac{\neg\neg A}{A}$

Οι επόμενοι (και πιο πολύπλοκοι) κανόνες κάνουν χρήση <u>υποπαραγωγών</u> (subderivations):

9. **Εισαγωγή Συνεπαγωγής**: Αν μπορούμε να συμπεράνουμε το Β από το σύνολο {Α, S_1, S_2, …., S_n} τότε μπορούμε να συμπεράνουμε το $A \to B$ από το σύνολο{S_1, S_2, …., S_n}. (Αιτιολόγηση: αν υποθέσουμε ότι οι S_1, S_2, …., S_n είναι αληθείς, τότε, αφού συμπεραίνουμε Β από το {Α, S_1, S_2, …., S_n}δεν μπορεί να ισχύει ότι η Α είναι αληθής και η Β ψευδής).

Συμβολισμός : $\dfrac{\dfrac{A}{B}}{A \to B}$

<u>Παράδειγμα:</u> Δείξτε ότι η $P \to Q, Q \to R / P \to R$ είναι έγκυρη.
Για να εφαρμόσουμε τον κανόνα εισαγωγής της συνεπαγωγής πρέπει να δείξουμε ότι μπορούμε να συμπεράνουμε το R από τα P, $P \to Q$, $R \to R$.

(1) P (υπόθεση)
(2) $P \to Q$ (υπόθεση)
(3) Q (από (1), (2) και απαλοιφή συνεπαγωγής)
(4) $Q \to R$ (υπόθεση)
(5) R (από (3), (4) και απαλοιφή συνεπαγωγής)

Από την (5) και τις υποθέσεις, ο κανόνας εισαγωγής της συνεπαγωγής μας δίνει $P \to R$.

Η ίδια απόδειξη μπορεί να γραφτεί και ως εξής :
(1) Υποπαραγωγή
  (1.1) P (υπόθεση υποπαραγωγής)
  (1.2) $P \to Q$ (υπόθεση παραγωγής)
  (1.3) Q (από (1.1) , (1.2) και απαλοιφή συνεπαγωγής)
  (1.4) $Q \to R$ (υπόθεση υποπαραγωγής)
  (1.5) R (από (1.3), (1.4) και απαλοιφή συνεπαγωγής)
(2) $P \to R$ (από (1) και εισαγωγή συνεπαγωγής)

Στο βήμα (2) απελευθερώνουμε (ξεχνάμε) την υπόθεση της υποπαραγωγής.

Η ίδια απόδειξη μπορεί να γραφτεί και με ακόμα έναν τρόπο :
(1) $P \to Q$ (υπόθεση)
(2) $Q \to R$ (υπόθεση)
(3) Υποπαραγωγή
    (3.1) P (υπόθεση υποπαραγωγής)
    (3.2) Q (από (1), (3.1) και απαλοιφή συνεπαγωγής)
    (3.3) R (από (3.2), (2) και απαλοιφή συνεπαγωγής)
(4) $P \to R$ (από (3) και εισαγωγή συνεπαγωγής)

Μέσα σε μια υποπαραγωγή επιτρέπεται να χρησιμοποιούμε σχήματα τα οποία έχουν παραχθεί έξω από την υποπαραγωγή. Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει: δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε σχήματα που παράγονται εντός μιας υποπαραγωγής στην κύρια παραγωγή.

10. **Απαλοιφή διάζευξης** (ή λογισμός με περιπτώσεις) : $\dfrac{A \lor B \quad \dfrac{A}{C} \quad \dfrac{B}{C}}{C}$

11. **Εισαγωγή ισοδυναμίας:** $\dfrac{\dfrac{A}{B} \quad \dfrac{B}{A}}{A \leftrightarrow B}$

12. **Εισαγωγή Άρνησης** (ή απαγωγή σε άτοπο): $\dfrac{\dfrac{A}{B} \quad \neg B}{\neg A}$

13. **Επανάληψη**: $\dfrac{A}{A}$

<u>Παράδειγμα:</u> Δείξτε ότι { $P \lor Q$, $\neg P$ } |= Q.

(1) $P \lor Q$ (υπόθεση)
(2) Υποπαραγωγή
    (2.1) P (υπόθεση υποπαραγωγής)
    (2.2) Υποπαραγωγή
        (2.2.1) $\neg Q$ (υπόθεση υποπαραγωγής)
        (2.2.2) P (από (2.1) με επανάληψη)
        (2.2.3) $\neg P$ (υπόθεση παραγωγής)
    (2.3) $\neg\neg Q$ (από (2.2) και εισαγωγή άρνησης)
    (2.4) Q (από (2.3) και απαλοιφή άρνησης)
(3) Υποπαραγωγή

(3.1) Q (υπόθεση υποπαραγωγής)
(3.2) Q (από (3.1) με επανάληψη)
(4) Q (από (1), (2),(3) και απαλοιφή διάζευξης)

Η υποπαραγωγή (3) είναι απαραίτητη για τη σωστή εφαρμογή του κανόνα της απαλοιφής διάζευξης. Πως οδηγηθήκαμε σε μια τέτοια απόδειξη;

Θέλουμε να δείξουμε: $\dfrac{\begin{array}{c} P \vee Q \\ \neg P \end{array}}{Q}$

Χρειάζεται να δείξουμε $\dfrac{P}{Q}$ υποπαραγωγή (2) και $\dfrac{Q}{Q}$ υποπαραγωγή (3).

<u>Παράδειγμα:</u> Δείξτε ότι { $P \to Q$, $\neg R \to \neg Q$, $R \to \neg S$ } |= $S \to \neg P$.

Για να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα της εισαγωγής της συνεπαγωγής πρέπει να δείξουμε ότι { $P \to Q$, $\neg R \to \neg Q$, $R \to \neg S$, S} |= $\neg P$ μέσω κάποιας υποπαραγωγής.

(1) Υποπαραγωγή
(1.1) S (υπόθεση υποπαραγωγής)
(1.2) Υποπαραγωγή
(1.2.1) P (υπόθεση υποπαραγωγής)
(1.2.2) $P \to Q$ (υπόθεση παραγωγής)
(1.2.3) Q ((1.2.1), (1.2.2) και απαλοιφή συνεπαγωγής)
(1.2.4) Υποπαραγωγή
(1.2.4.1) $\neg R$ (υπόθεση υποπαραγωγής)
(1.2.4.2) $\neg R \to \neg Q$ (υπόθεση παραγωγής)
(1.2.4.3) $\neg Q$ ((1.2.4.1), (1.2.4.2) και απαλοιφή συνεπαγωγής)
(1.2.4.4) Q ((1.2.3) και επανάληψη)
(1.2.5) $\neg\neg R$ ((1.2.4) και εισαγωγή άρνησης)
(1.2.6) R ((1.2.5) και απαλοιφή άρνησης)
(1.2.7) $R \to \neg S$ (υπόθεση παραγωγής)
(1.2.8) $\neg S$ ((1.2.6) , (1.2.7) και απαλοιφή συνεπαγωγής)
(1.2.9) S ((1.1) και επανάληψη)
(1.3) $\neg P$ (από (1.2) και εισαγωγή άρνησης)
(2) $S \to \neg P$ (από (1) και εισαγωγή συνεπαγωγής)

4.2.2 Μορφολογική Παραγωγή: Αποδείξεις

Το σύστημα της μορφολογικής παραγωγής είναι μη-αλγοριθμικό : προσφέρει κανόνες που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αλλά δεν προσφέρει καμία καθοδήγηση για το σχηματισμό της απόδειξης.

Ευριστικοί κανόνες (heuristics): μπορούν συχνά να βοηθήσουν στην κατασκευή αποδείξεων αλλά δεν προσφέρουν εγγύηση ότι θα οδηγήσουν στο επιθυμητό αποτέλεσμα :

1. Αν το συμπέρασμα που θέλουμε να εξάγουμε έχει ως κύριο συνδετικό το *, πορσπαθούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα εισαγωγής του *.
2. Αν μια υπόθεση έχει * σαν κύριο συνδετικό, προσπαθούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα απαλοιφής του *.
3. Αν οι δύο προηγούμενοι κανόνες αποτύχουν, προσπαθούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα απαλοιφής της άρνησης.

Δεν είναι απαραίτητο να χρησιμοποιούνται αυτοί οι κανόνες σε κάθε περίπτωση. Για παράδειγμα, για να αποδείξουμε ότι η εξαγωγή συμπεράσματος

$$P, P \to (Q \to R) / Q \to R$$

είναι έγκυρη, θα ήταν σφάλμα να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα εισαγωγής της συνεπαγωγής μιας και το συμπέρασμα εμφανίζεται ως υποπρόταση μιας από τις υποθέσεις. Επίσης, για την εξαγωγή συμπεράσματος

$$P \vee Q, R / (P \vee Q) \wedge R$$

θα ήταν σφάλμα να χρησιμοποιηθεί ο δεύτερος κανόνας για την απαλοιφή της διάζευξης.

<u>Παράδειγμα</u> : Δείξτε ότι η εξαγωγή συμπεράσματος $\neg P \vee Q / P \to Q$ είναι έγκυρη.

Θα προσπαθήσουμε να εκφράσουμε τον κανόνα εισαγωγής της συνεπαγωγής σύμφωνα με τον πρώτο ευριστικό κανόνα. Χρειαζόμαστε μια υποπαραγωγή με υπόθεση P και συμπέρασμα Q :

(1) Υποπαραγωγή
    (1.1) P (υπόθεση υποπαραγωγής)
    .
    .
    .
    (1.ν) Q
(2) $P \to Q$ (από (1) και εισαγωγή συνεπαγωγής)

Παρατηρούμε ότι η υπόθεση της παραγωγής έχει ως κύριο συνδετικό το $\vee$. Θα προσπαθήσουμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα της απαλοιφής της διάζευξης εντός της υποπαραγωγής (1):

(1) Υποπαραγωγή
    (1.1) P (υπόθεση υποπαραγωγής)
    (1.2) $\neg P \vee Q$ (υπόθεση παραγωγής)
    (1.3) Υποπαραγωγή

(1.3.1) $\neg P$ (υπόθεση υποπαραγωγής)

.

.

.

(1.3.μ) Q

(1.4) Υποπαραγωγή

(1.4.1) Q (υπόθεση υποπαραγωγής)

.

.

.

(1.4.κ) Q

(1.5) Q (από (1.2), (1.3), (1.4) με απαλοιφή - $\vee$)

(2) $P \to Q$ (από (1) και εισαγωγή συνεπαγωγής)

Η υποπαραγωγή (1.4) είναι τετριμμένη : χρησιμοποιείται μόνο ο κανόνας της επανάληψης. Για την υποπαραγωγή (1.3) θα χρησιμοποιούμε τον τρίτο ευριστικό κανόνα. Συνολικά, η παραγωγή θα έχει ως εξής :

(1) Υποπαραγωγή

(1.1) P (υπόθεση υποπαραγωγής)

(1.2) $\neg P \vee Q$ (υπόθεση παραγωγής)

(1.3) Υποπαραγωγή

(1.3.1) $\neg P$ (υπόθεση υποπαραγωγής)

(1.3.2) Υποπαραγωγή

(1.3.2.1) $\neg Q$ (υπόθεση υποπαραγωγής)

(1.3.2.2) P (από (1.1) με επανάληψη)

(1.3.2.3) $\neg P$ (από (1.3.1) με επανάληψη)

(1.3.3) $\neg\neg Q$ (από (1.3.2) με εισαγωγή $\neg$)

(1.3.4) Q (από (1.3.3) με απαλοιφή $\neg$)

(1.4) Υποπαραγωγή

(1.4.1) Q (υπόθεση υποπαραγωγής)

(1.4.2) Q (από (1.4.1) με επανάληψη)

(1.5) Q (από (1.2), (1.3), (1.4) με απαλοιφή - $\vee$)

(2) $P \to R$ (από (1) και εισαγωγή συνεπαγωγής)

Σε κάθε σωστή παραγωγή αντιστοιχεί ένας κανόνας που μας επιτρέπει να καταλήγουμε από τις υποθέσεις στο συμπέρασμα παραλείποντας τα ενδιάμεσα βήματα. Σχετικά με το προηγούμενο παράδειγμα ένας τέτοιος κανόνας είναι

Απαλοιφή $\neg 2$: $\dfrac{\begin{array}{c} A \vee B \\ \neg A \end{array}}{B}$

Χρησιμοποιώντας αυτό τον κανόνα η προηγούμενη παραγωγή μπορεί να γραφτεί ως εξής :

(1) $\neg P \vee Q$ (υπόθεση παραγωγής)

(2) Υποπαραγωγή

    (2.1) P (υπόθεση υποπαραγωγής)

    (2.2) Υποπαραγωγή

        (2.2.1) $\neg P$ (υπόθεση υποπαραγωγής)

        (2.2.2) P

        (2.2.3) $\neg P$ (από (2.2.1) με επανάληψη)

    (2.3) $\neg\neg P$ (από (2.2) με εισαγωγή $\neg$)

    (2.4) Q (από (1), (2.3) με απαλοιφή $\neg 2$)

(3) $P \rightarrow R$ (από (1) και εισαγωγή συνεπαγωγής)

Η μορφολογική παραγωγή - εκτός από τον έλεγχο εγκυρότητας – μπορεί να χρησιμοποιηθεί για αποδείξεις. Μια απόδειξη είναι μια παραγωγή χωρίς υποθέσεις. Επομένως το συμπέρασμα μιας απόδειξης πρέπει να είναι ταυτολογία.

Παράδειγμα: Αποδείξτε την ταυτολογία $P \rightarrow P$

(1) Υποπαραγωγή

    (1.1) P (υπόθεση υποπαραγωγής)

    (1.2) P (από (1.1) με επανάληψη)

(2) $P \rightarrow P$ (από (1) και εισαγωγή $\rightarrow$)

Παράδειγμα: Αποδείξτε την ταυτολογία $P \vee \neg P$

(1) Υποπαραγωγή

    (1.1) $\neg(P \vee \neg P)$ (υπόθεση υποπαραγωγής)

    (1.2) υποπαραγωγή

        (1.2.1) P (υπόθεση υποπαραγωγής)

        (1.2.2) $P \vee \neg P$ (από (1.2.1) με εισαγωγή $\vee$)

        (1.2.3) $\neg(P \vee \neg P)$ (από (1.1) με επανάληψη)

    (1.3) $\neg P$ (από (1.2), (1.1) και εισαγωγή $\neg$)

    (1.4) $P \vee \neg P$ (από (1.3) και εισαγωγή $\vee$)

    (1.5) $\neg(P \vee \neg P)$ (από (1.1) με επανάληψη)

(2) $\neg\neg(P \vee \neg P)$ (από (1) και εισαγωγή $\neg$)

(3) $P \vee \neg P$ (από (2) και απαλοιφή $\neg$)

Ένα προτασιακό σχήμα που παράγεται χωρίς υποθέσεις ονομάζεται θεώρημα. Το θεώρημα του προηγούμενου παραδείγματος μπορεί να συμβολιστεί ως:

$$\frac{}{P \vee \neg P}$$ (αποκλεισμός μέσου).

Τα θεωρήματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε παραγωγές για την εξαγωγή συμπερασμάτων.

<u>Παράδειγμα</u>: Δείξτε ότι η εξαγωγή συμπεράσματος $\neg(P \wedge Q) / \neg P \vee \neg Q$ είναι έγκυρη.

(1) $Q \vee \neg Q$ (αποκλεισμός μέσου)
(2) υποπαραγωγή
    (2.1) Q (υπόθεση υποπαραγωγής)
    (2.2) υποπαραγωγή
        (2.2.1) P (υπόθεση υποπαραγωγής)
        (2.2.2) $P \wedge Q$ (από (2.2.1), (2.1) με εισαγωγή $\wedge$)
        (2.2.3) $\neg(P \wedge Q)$ (υπόθεση παραγωγής)
    (2.3) $\neg P$ (από (2.2) και εισαγωγή $\neg$)
    (2.4) $\neg P \vee \neg Q$ (από (2.3) και εισαγωγή $\vee$)
(3) Υποπαραγωγή
    (3.1) $\neg Q$ (υπόθεση υποπαραγωγής)
    (3.2) $\neg P \vee \neg Q$ (από (3.1) και εισαγωγή $\vee$)
(4) $\neg P \vee \neg Q$ (από (1), (2), (3) και απαλοιφή $\vee$)

<u>Παράδειγμα</u>: Δείξτε ότι η εξαγωγή συμπεράσματος $P \to Q, \neg(P \to R) / Q$ είναι έγκυρη.

(1) Υποπαραγωγή
    (1.1) $\neg P$ (υπόθεση υποπαραγωγής)
    (1.2) υποπαραγωγή
        (1.2.1) P (υπόθεση υποπαραγωγής)
        (1.2.2) υποπαραγωγή
            (1.2.2.1) $\neg R$ (υπόθεση υποπαραγωγής)
            (1.2.2.2) P (από (1.2.1) με επανάληψη)
            (1.2.2.3) $\neg P$ (από (1.1) με επανάληψη)
        (1.2.3) $\neg\neg R$ (από (1.2.2) και εισαγωγή $\neg$)
        (1.2.4) R (από (1.2.3) και απαλοιφή $\neg$)
    (1.3) $P \to R$ (από (1.2) και εισαγωγή $\to$)
    (1.4) $\neg(P \to R)$ υπόθεση
(2) $\neg\neg P$ (από (1.1), (1.2) με εισαγωγή $\neg$)
(3) P (από (2) με απαλοιφή $\neg$)
(4) $P \to Q$ (υπόθεση)
(5) Q (από (3), (4) και απαλοιφή $\to$)

Παραδείγματα Χρήσης Μορφολογικής Παραγωγής

<u>Παράδειγμα:</u> Δείξτε ότι η εξαγωγή συμπεράσματος $P \to Q, P \to R / P \to Q \wedge R$ είναι έγκυρη.

(1) $P \to Q$ (υπόθεση παραγωγής)
(2) $P \to R$ (υπόθεση παραγωγής)
(3) υποπαραγωγή
  (3.1) P (υπόθεση παραγωγής)
  (3.2) Q (από (3.1), (1) και απαλοιφή $\to$)
  (3.3) R (από (3.1), (2) και απαλοιφή $\to$)
  (3.4) $Q \wedge R$ (από (3.2), (3.3) και εισαγωγή $\wedge$)
(4) $P \to Q \wedge R$ (από (3) και εισαγωγή $\to$)

<u>Παράδειγμα</u> Αποδείξτε ότι η εξαγωγή συμπεράσματος $\neg P / \neg(P \wedge Q)$ είναι έγκυρη.

(1) $\neg P$ (υπόθεση)
(2) υποπαραγωγή
  (2.1) $P \wedge Q$ (υπόθεση υποπαραγωγής)
  (2.2) P (από (2.1) με απαλοιφή $\wedge$)
(3) $\neg(P \wedge Q)$ (από (1), (2) και εισαγωγή $\neg$)

<u>Παράδειγμα</u> : Δείξτε ότι η εξαγωγή συμπεράσματος $P \to Q, \neg Q / \neg P$ είναι έγκυρη.

(1) $P \to Q$ (υπόθεση)
(2) $\neg Q$ (υπόθεση)
(3) υποπαραγωγή
  (3.1) P (υπόθεση υποπαραγωγής)
  (3.2) Q (από (1), (3.1) με απαλοιφή συνεπαγωγής)
(4) $\neg P$ (από (2), (3) και εισαγωγή $\neg$)

<u>Παράδειγμα</u> : Δείξτε ότι η εξαγωγή συμπεράσματος $P \vee Q, \neg Q \vee R / P \vee R$ είναι έγκυρη.

(1) $P \vee Q$ (υπόθεση)
(2) υποπαραγωγή
  (2.1) P (υπόθεση υποπαραγωγής)
  (2.2) $P \vee R$ (από (2.1) με εισαγωγή $\vee$)
(3) υποπαραγωγή
  (3.1) Q (υπόθεση υποπαραγωγής)
  (3.2) $\neg Q \vee R$ (υπόθεση)
  (3.3) R (από (3.1), (3.2) και απαλοιφή $-\vee-2$)
  (3.4) $P \vee R$ (από (3.3) και εισαγωγή $\vee$)
(4) $P \vee R$ (από (1),(2),(3) και απαλοιφή $\vee$)

Παράδειγμα : Αποδείξτε το θεώρημα $R \to (P \to (Q \to R))$

(1) υποπαραγωγή
(1.1) R (υπόθεση υποπαραγωγής)
(1.2) υποπαραγωγή
(1.2.1) P (υπόθεση υποπαραγωγής)
(1.2.2) υποπαραγωγή
(1.2.2.1) Q (υπόθεση υποπαραγωγής)
(1.2.2.2) R (από (1.1) με επανάληψη)
(1.2.3) $Q \to R$ (από (1.2.2) και εισαγωγή $\to$)
(1.3) $P \to (Q \to R)$ (από (1.2) και εισαγωγή $\to$)
(2) $R \to (P \to (Q \to R))$ (από (1) και εισαγωγή $\to$)

4.2.3 Κατασκευή Μοντέλων

Διάκριση μεταξύ συστημάτων παραγωγής και συστημάτων ανασκευής :

- Τα συστήματα παραγωγής (όπως η μορφολογική παραγωγή) παράγουν το συμπέρασμα με χρήση συντακτικών κανόνων λογισμού
- Τα συστήματα ανασκευής, προκειμένου να δείξουν ότι $\{ P_1,.....,P_n \} \models C$, επιχειρούν να δείξουν ότι το σύνολο $\{ P_1,.....,P_n, \neg C \}$ είναι μη-ικανοποιήσιμο.

Η κατασκευή μοντέλων είναι ένα τέτοιο σύστημα ανασκευής.

Ιδέα της Μεθόδου Κατασκευής Μοντέλων

Για να αποφασίσουμε ότι ένα σύνολο είναι ικανοποιήσιμο ή όχι ψάχνουμε συστηματικά για μια ερμηνεία η οποία ικανοποιεί όλα τα μέλη του συνόλου. Αν μια τέτοια ερμηνεία βρεθεί, τότε το σύνολο είναι ικανοποιήσιμο. Αν όχι, τότε το σύνολο είναι μη ικανοποιήσιμο. Μια ερμηνεία που ικανοποιεί κάθε μέλος ενός συνόλου προτάσεων S λέγεται μοντέλο του S.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ψάχνουμε για μια ερμηνεία που ικανοποιεί ένα σύνολο προτάσεων το οποίο περιέχει μια πρόταση της μορφής $A \wedge B$, ας πούμε το σύνολο $S \cup \{A \wedge B\}$. Ξέρουμε ότι μια ερμηνεία ικανοποιεί την πρόταση $A \wedge B$ αν και μόνο αν ικανοποιεί και την A και την B. Άρα, η ερμηνεία που ψάχνουμε ικανοποιεί $S \cup \{A \wedge B\}$ αν και μόνο αν ικανοποιεί το $S \cup \{A, B\}$. Δηλαδή $\models_I S \cup \{A \wedge B\}$, αν και μόνο αν $\models_I S \cup \{A, B\}$ για οποιαδήποτε ερμηνεία I.

Παρομοίως, $\models_I S \cup \{A \vee B\}$ αν και μόνο αν $\models_I S \cup \{A\}$ ή $\models_I S \cup \{B\}$ για οποιαδήποτε ερμηνεία I, καθώς και $\not\models_I$ A αν και μόνο αν $\models_I \neg A$ για οποιαδήποτε ερμηνεία I. Παρόμοιες απλοποιήσεις υπάρχουν και για τα υπόλοιπα συνδετικά.

Αν συνεχίσουμε κατά αυτόν τον τρόπο, είτε θα βρούμε ότι όλα τα σύνολα που προσπαθούμε να δείξουμε ότι είναι ικανοποιήσιμα περιέχουν αντινομίες – οπότε το αρχικό σύνολο είναι μη-ικανοποιήσιμο είτε θα βρούμε ότι το σύνολο είναι ικανοποιήσιμο με το να καταλήξουμε σε μια ερμηνεία που ικανοποιεί ένα σύνολο που περιέχει μόνο γράμματα ή αρνήσεις γραμμάτων. Σε αυτήν την περίπτωση το μοντέλο αποτελείται από τα γράμματα του συνόλου που προκύπτει.

Φορμαλισμός της Μεθόδου

Θα χρησιμοποιήσουμε ένα σύνολο C που αποτελείται από σύνολα προτάσεων. Αρχικά C = {S}, όπου S είναι το σύνολο που θέλουμε να δείξουμε ότι είναι (μη-) ικανοποιήσιμο. Το C διαδοχικά θα αντικαθίσταται από ένα σύνολο που προκύπτει από την εφαρμογή <u>κανόνων αντικατάστασης</u>, οι οποίοι παράγουν απλούστερα σύνολα. Οποτεδήποτε ένα από τα σύνολα μέρη του C περιέχει A και $\neg A$ για κάποια πρόταση A, το σύνολο αυτό θα αφαιρείται από το C.

Η διαδικασία τερματίζεται όταν δεν μπορούν πλέον να εφαρμοστούν άλλοι κανόνες αντικατάστασης. Αν τότε το C είναι κενό, το S είναι μη ικανοποιήσιμο. Διαφορετικά, κάθε μέλος του C είναι ένα μοντέλο του S.

<u>Κανόνες Αντικατάστασης</u>: έχουν την μορφή : αν το C περιέχει ένα σύνολο της μορφής X, τότε αντικατάστησέ το με το Y. Οι κανόνες δίνονται στο παρακάτω πίνακα.

Κανόνας	X	Y
$[\wedge]$	$S \cup \{A \wedge B\}$	$S \cup \{A, B\}$
$[\vee]$	$S \cup \{A \vee B\}$	$S \cup \{A\}, S \cup \{B\}$
$[\rightarrow]$	$S \cup \{A \rightarrow B\}$	$S \cup \{\neg A\}, S \cup \{B\}$
$[\leftrightarrow]$	$S \cup \{A \leftrightarrow B\}$	$S \cup \{A, B\}, S \cup \{\neg A, \neg B\}$
$[\neg\wedge]$	$S \cup \{\neg(A \wedge B)\}$	$S \cup \{\neg A\}, S \cup \{\neg B\}$
$[\neg\vee]$	$S \cup \{\neg(A \vee B)\}$	$S \cup \{\neg A, \neg B\}$
$[\neg\rightarrow]$	$S \cup \{\neg(A \rightarrow B)\}$	$S \cup \{A, \neg B\}$
$[\neg\leftrightarrow]$	$S \cup \{\neg(A \leftrightarrow B)\}$	$S \cup \{A, \neg B\}, S \cup \{\neg A., B\}$
$[\neg\neg]$	$S \cup \{\neg\neg A\}$	$S \cup \{A\}$
[del]	$S \cup \{A, \neg A\}$	(delete)

Οι κανόνες για τους οποίους το Y περιέχει δύο σύνολα λέγονται κανόνες διακλάδωσης.

Κανόνες εφαρμογής των κανόνων αντικατάστασης: ποτέ δεν εφαρμόζουμε έναν κανόνα διακλάδωσης αν μπορούμε να εφαρμόσουμε έναν άλλο κανόνα. Επίσης, αν ο κανόνας [del] μπορεί να χρησιμοποιηθεί, τότε τον εφαρμόζουμε πριν από άλλους κανόνες.

<u>Παράδειγμα:</u> Δείξτε ότι $\{\neg P \vee Q, P\} \models Q$

Θα δείξουμε ότι το σύνολο S = $\{\neg P \vee Q, P, \neg Q\}$ είναι μη ικανοποιήσιμο.

$C_O = \{S\} = \{\{\neg P \vee Q, P, \neg Q\}\}$. Εφαρμόζουμε τον κανόνα $[\vee]$, από τον οποίο προκύπτει το $C_1 = \{\{\neg P, P, \neg Q\}, \{Q, P, \neg Q\}\}$. Με την εφαρμογή του κανόνα [del] προκύπτει το $C_2 = \{\{Q, P, \neg Q\}\}$ και κατόπιν το $C_3 = \{\}$. Άρα το S είναι μη ικανοποιήσιμο.

<u>Παράδειγμα:</u> Δείξτε ότι $\{\neg P \vee Q\} \models P \to Q$

C	Κανόνας
$C_0 = \{\{\neg P \vee Q, \neg(P \to Q)\}\}$	
$C_1 = \{\{\neg P \vee Q, P, \neg Q)\}\}$	$[\neg \to]$
$C_2 = \{\{\neg P, P, \neg Q)\}, \{Q, P, \neg Q\}\}$	$[\vee]$
$C_3 = \{\{Q, P, \neg Q\}\}$	[del]
$C_4 = \{\}$	[del]

<u>Παράδειγμα:</u> Δείξτε ότι $\{P \to Q, \neg R \to \neg Q, R \to \neg S\} \models S \to \neg P$

C	Κανόνας
$C_0 = \{\{P \to Q, \neg R \to \neg Q, R \to \neg S, \neg(S \to \neg P)\}\}$	
$C_1 = \{\{P \to Q, \neg R \to \neg Q, R \to \neg S, S, \neg\neg P\}\}$	$[\neg \to]$
$C_2 = \{\{P \to Q, \neg R \to \neg Q, R \to \neg S, S, P\}\}$	$[\neg\neg]$
$C_3 = \{\{\neg P, \neg R \to \neg Q, R \to \neg S, S, P\}, \{Q, \neg R \to \neg Q, R \to \neg S, S, P\}\}$	$[\to]$
$C \ = \{\{Q, \neg R \to \neg Q, R \to \neg S, S, P\}\}$	[del]
$C_5 = \{\{Q, \neg\neg R, R \to \neg S, S, P\}, \{Q, \neg Q, R \to \neg S, S, P\}\}$	$[\to]$
$C_6 = \{\{Q, \neg\neg R, R \to \neg S, S, P\}\}$	[del]
$C_7 = \{\{Q, R, R \to \neg S, S, P\}\}$	$[\neg\neg]$
$C_8 = \{\{Q, R, \neg R, S, P\}, \{Q, R, \neg S, S, P\}\}$	$[\to]$
$C_9 = \{\{Q, R, \neg S, S, P\}\}$	[del]
$C_{10} = \{\}$	[del]

Για να αποφύγουμε να γράφουμε τις ίδιες προτάσεις πολλές φορές, οι αποδείξεις μπορούν να γραφούν σε μορφή δέντρου, στο οποίο κάθε πρόταση εμφανίζεται μόνο μια φορά και το σύνολο C αντιστοιχεί σε μονοπάτια από τη ρίζα στα φύλλα του δέντρου.

Αρχικά γράφουμε τα στοιχεία του συνόλου το οποίο θέλουμε να αποδείξουμε ότι είναι (μη) ικανοποιήσιμο. Η εφαρμογή κανόνα συμβολίζεται με μια οριζόντια γραμμή και η πρόταση στην οποία εφαρμόζεται ο κανόνας μαρκάρεται με x.

Παράδειγμα : Δείξτε ότι $\{\neg P \vee Q\} \models P \rightarrow Q$.

x (1) $\neg P \vee Q$

x (2) $\neg(P \rightarrow Q)$

(3) P

(4) $\neg Q$

(5) $\neg P$ (6) Q

==============3 ==================4

Η εφαρμογή του κανόνα [del] συμβολίζεται με μια διπλή οριζόντια γραμμή και τον αριθμό της πρότασης η οποία, μαζί με την πρόταση που βρίσκεται ακριβώς πάνω από τη διπλή γραμμή, ενεργοποιούν τον κανόνα. Η διπλή γραμμή θεωρείται ότι <u>κλείνει</u> αυτό το μονοπάτι του δέντρου. Το δέντρο λέγεται πλήρες αν όλες οι προτάσεις έχουν χρησιμοποιηθεί. Αν κάθε μονοπάτι είναι κλειστό, τότε το αρχικό σύνολο είναι μη ικανοποιήσιμο.

Παράδειγμα : Ελέξτε αν $\{(P \rightarrow Q) \vee R\} \models P \rightarrow (Q \rightarrow R)$.

x (1) $(P \rightarrow Q) \vee R$

x (2) $\neg(P \rightarrow (Q \rightarrow R))$

(3) P

x (4) $\neg(Q \rightarrow R)$

(5) Q

(6) $\neg R$

x (7) $P \rightarrow Q$

(9) $\neg P$ (10) Q (8) R

========== 3 ========= 6

Το δέντρο είναι πλήρες καθώς δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κανένα άλλο κανόνα. Υπάρχει ένα μονοπάτι στο δέντρο το οποίο δεν είναι κλειστό. Τα γράμματα που εμφανίζονται στο μονοπάτι αυτό αποτελούν το σύνολο $\{Q, \neg R, P\}$. Άρα η ερμηνεία που ικανοποιεί το αρχικό σύνολο είναι η $I = \{P,Q\}$. Συνεπώς, η λογική συνεπαγωγή δεν είναι έγκυρη.