ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Από τα Quarks μέχρι το Σύμπαν

Ε. Οικονόμου

Τμήμα Φυσικής

Ανακοίνωση 5: 17η Οκτωβρίου 2013

Παρατήρηση θεωρίας:

Σωμάτιο μάζας m εγκλωβισμένο σε ομοιογενή «όγκο» Ω_d ακτίνας R $(\Omega_d \propto R^d)$σε χώρο d διαστάσεων με $<x>=<y>=...=0$ και $<p_i>=0,\ i=x,\ ...$

Heisenberg:

$$<\vec{p}^2>_{\varepsilon\lambda.} \propto <p_x^2>_{\varepsilon\lambda.} = \Delta p_{x,\varepsilon\lambda.}^2 \propto \hbar^2/\Delta x^2 \propto \hbar^2/<x^2> \propto \hbar^2/R^2 \propto \hbar^2/\Omega_d^{2/d} \quad (1)$$

$$<\varepsilon_K>_{\varepsilon\lambda.} = <\vec{p}^2/2m>_{\varepsilon\lambda.} \propto \hbar^2/m\Omega_d^{2/d} \quad (2)$$

Pauli:

N όμοια σωμάτια με σπιν 1/2 (φερμιόνια) εγκλωβισμένα σε «όγκο» Ω_d ακτίνας R $(\Omega_d \propto R^d)$σε χώρο d διαστάσεων θα ικανοποιούσαν την απαγορευτική αρχή του Pauli, αν χώριζαν τον «όγκο» Ω_d σε $N/2$ ίσους υποόγκους στον καθένα από τους οποίους τοποθετούνταν μόνο δύο σωμάτια (με αντίθετα σπιν). Τότε όμως κατά μέσο όρο το κάθε σωμάτιο θα εγκλωβιζόταν σε «όγκο» $2\Omega_d/N$ αντί του «όγκου» Ω_d και η κινητική του ενέργεια θα γινόταν $<\varepsilon_K> \propto \hbar^2 N^{2/d}/m\Omega_d^{2/d}$.

Επομένως η ελάχιστη ολική κινητική ενέργεια *N* όμοιων σωματίων με σπιν 1/2 (φερμιόνια) εγκλωβισμένων σε ομοιογενή «όγκο» Ω_d ακτίνας R $(\Omega_d \propto R^d)$σε χώρο d διαστάσεων ικανοποιεί τη σχέση

$$E_K = N<\varepsilon_K>_{\varepsilon\lambda.} = \propto \hbar^2 N^{(d+2)/d}/m\Omega_d^{2/d} \propto \hbar^2 N^{(d+2)/d}/mR^2 \quad (3)$$

Για την εύρεση του αριθμητικού συντελεστή που θα μετατρέψει την (3) από αναλογία σε ισότητα υπάρχουν δύο δρόμοι: Ο ένας, προσεγγιστικός, συνίσταται
στο να κρατήσουμε τους αριθμητικούς συντελεστές σε κάθε ένα από τα προηγούμενα βήματα (π.χ. $<x^2>=<r^2>/d = R^2/5$ για $d=3$, βλ. (2.5)). Ο άλλος βασίζεται στην ρεαλιστική εικόνα ότι ένα σωμάτιο εγκλωβισμένο σε ομοιογενή «όγκο» Ω_d μπορεί να βρεθεί σε καταστάσεις που αντιστοιχούν σε διακριτές ενεργειακές στάθμες που τις κατατάσσουμε κατά σειρά ενέργειας και τις γεμίζουμε με σωμάτια διαδοχικά αρχίζοντας από την κατώτερη μέχρι να μας τελειώσουν τα N σωμάτια. Ας ονομάσουμε $\varepsilon_F(N)$την ενέργεια της ανώτατης κατειλημμένης στάθμης. Αν προσθέσουμε ένα ακόμη όμοιο σωμάτιο στο σύστημα επιμένοντας στη διατήρηση της ελάχιστης ολικής ενέργειας, η αναπόφευκτη αύξηση της ολικής ενέργειας θα ισούται με $E_K(N+1) - E_K(N) = \varepsilon_F(N+1)$.

Το $\varepsilon_F(N+1)$θα ισούται είτε με $\varepsilon_F(N+1) > \varepsilon_F(N)$(αν το N είναι άρτιο) είτε με $\varepsilon_F(N)$ (αν το N είναι περιττό). Επομένως, κατά μέσο όρο
$E_K(N+1) - E_K(N) = [E_K(N+1) - E_K(N)]/1 = E_F \equiv [\varepsilon_F(n+1) + \varepsilon_F(n)]/2$,

που σημαίνει ότι

$$E_F = \partial E_K / \partial N \qquad (4)$$

Η μέγιστη κατειλημμένη ενέργεια E_F συνδέεται με την μέγιστη κατειλημμένη ορμή $p_F = \hbar k_F$ (σε ένα ομοιογενή «όγκο» Ω_d και στο όριο όπου $N \to \infty,\ \Omega_d \to \infty$ με N/Ω_d=σταθ.) με την προφανή σχέση $E_F = \hbar^2 k_F^2 / 2m$.

Η k_F μπορεί να υπολογισθεί εύκολα χρησιμοποιώντας τη γενική και πολύ χρήσιμη σχέση

$$\sum_{\vec{k}} f(\vec{k}) = [\Omega_d / (2\pi)^d] \int d^d k f(\vec{k}) \qquad (5)$$

και τη σχέση

$$N = 2\sum_{\vec{k}} f(\vec{k}) = 2[\Omega_d / (2\pi)^d] \int_0^{k_F} d^d k \qquad (6)$$

όπου στην προκειμένη περίπτωση για να ισχύει η (6), η $f(\vec{k})$ είναι μονάδα για $|\vec{k}| \le k_F$ (δηλαδή για τις κατειλημμένες καταστάσεις) και μηδέν για τις μη κατειλημμένες. Το ολοκλήρωμα στην (6) δεν είναι τίποτε άλλο παρά ο «όγκος» στον χώρο των $\vec{k}$ που ισούται με $2k_F,\ \pi k_F^2,\ (4\pi/3)k_F^3$ για $d = 1,\ 2,\ 3$ αντιστοίχως. Άρα, αντικαθιστώντας στην (6) βρίσκουμε:

Για $d = 1$, $k_F = (\pi/2)(N/2R) \equiv (\pi/2)n$, όπου n είναι η συγκέντρωση των σωματίων.
Για $d = 2$, $k_F = (2\pi n)^{1/2}$ και για $d = 3$ $k_F = (3\pi^2 n)^{1/3}$.
Από την τελευταία αυτή σχέση και την (3) έχουμε
για $d = 3$: $E_K = (3/5)(\hbar^2 k_F^2 / 2m)N = 0{,}3(3\pi^2)^{2/3}\hbar^2 N^{5/3} / mV^{2/3} = 2{,}8712\ \hbar^2 N^{5/3} / mV^{2/3}$ (7)

Στα παραπάνω θεωρήσαμε ότι $mc^2 \gg c|\vec{p}|$ ώστε η ακριβής σχέση μεταξύ κινητικής ενέργειας και ορμής $\varepsilon_K = \sqrt{m^2c^4 + c^2|\vec{p}|^2} - m\,c^2$ να γίνει $\varepsilon_K = p^2 / 2m$.
Στο αντίθετο όριο $mc^2 \ll c|\vec{p}|$ η σχέση μεταξύ κινητικής ενέργειας και ορμής γίνεται $\varepsilon_K = c|\vec{p}|$. Μπορεί να δείξει κανείς ότι $<|\vec{p}|>=[\sqrt{d(d+2)} / (d+1)]\sqrt{<p^2>} \propto \sqrt{<p^2>}$, όπου d είναι η διάσταση του χώρου. Με βάση την παραπάνω σχέση, την $\varepsilon_K = c|\vec{p}|$ και την (1) έχουμε

$$<\varepsilon_K>_{\varepsilon\lambda.} \propto c\hbar / R \propto c\hbar / \Omega_d^{1/d} \qquad (2^{\alpha})$$

Με την ίδια όπως προηγουμένως επιχειρηματολογία βασισμένη στην απαγορευτική του Pauli έχουμε λαμβάνοντας υπόψη την (2^{α})

$$E_K = N <\varepsilon_K>_{\varepsilon\lambda.} \propto c\hbar N^{(d+1)/d} / \Omega_d^{1/d} \propto c\hbar N^{(d+1)/d} / R \qquad (3^{\alpha})$$

Οι σχέσεις (4) έως (6) παραμένουν εν ισχύ, αφού δεν εξαρτώνται από τη σχέση μεταξύ κινητικής ενέργειας και ορμής. Η αντίστοιχη της (7) για $d = 3$ είναι:

$$E_K = (3/4)c\hbar k_F N = (3/4)(3\pi^2)^{1/3}(c\hbar N^{4/3} / V^{1/3}) = 2{,}3202(c\hbar N^{4/3} / V^{1/3}) = 1{,}4393(c\hbar N^{4/3} / R)$$

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης