ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Εισαγωγή στη Σύγχρονη Φυσική ΙΙ

Θ. Ν. Τομαράς

Τμήμα Φυσικής

ΛΥΣΕΙΣ ΣΕΙΡΑΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 1

ΔΙΑΣΤΟΛΗ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ - ΣΥΣΤΟΛΗ ΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ

Θ. Τομαράς

1. Να υπολογισθούν οι παρακάτω παραστάσεις με την ακρίβεια που αναφέρεται: (α) 0.99^2 με ακρίβεια δεύτερου δεκαδικού ψηφίου. (β) 0.999999^4 με ακρίβεια έκτου δεκαδικού ψηφίου. (γ) $\sqrt{1-0.001^2}$ με ακρίβεια έβδομου δεκαδικού ψηφίου.

Λύση: (α) $0.99^2 = (1-0.01)^2 \simeq 1 - 2 \times 0.01 = 0.98$
(β) $0.999999^4 = (1-0.000001)^4 \simeq 1 - 4 \times 0.000001 = 0.999996$
(γ) $\sqrt{1-0.001^2} \simeq 1 - 0.5 \times 0.001^2 = 1 - 5 \times 10^{-7} = 1 - 0.0000005 = 0.9999995$

2. Δέσμη με $N_0 = 10^{20}$ μιόνια κινείται με ταχύτητα $0.999999c$. (α) Πόσα μιόνια εκτιμάτε οτι θα έχουν απομείνει στη δέσμη μετά από $t = 10^{-2} sec$; (β) Τί απόσταση θα έχουν διανύσει μέχρι εκείνη τη στιγμή;
Ο χρόνος ζωής του μιονίου είναι $\tau_\mu \simeq 2 \times 10^{-6} sec$.

Λύση: (α) $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2} \simeq 10^3/\sqrt{2}$.
$N = N_0 e^{-t/\gamma\tau} = 10^{20} e^{-\sqrt{2}\times 10^{-2}/10^3 \times 2 \times 10^{-6}} \simeq 10^{16.9}$
(β) $l = 0.999999c \times 10^{-2} sec = 0.999999 \times 3 \times 10^8 m \times 10^{-2} = 2.999997 \times 10^6 m$.

3. Δοχείο όγκου V_0 (στο σύστημα ηρεμίας του) και ακανόνιστου σχήματος κινείται με ταχύτητα v ως προς τον παρατηρητή Σ. (α) Ποιός είναι ο όγκος V που μετράει ο Σ; (β) Αν n_0 είναι η πυκνότητα σωματιδίων του αερίου μέσα στο δοχείο στο σύστημα ηρεμίας του, τί πυκνότητα n μετράει ο Σ;

Λύση: (α) Χωρίστε τον όγκο σε απειροστά μικρά ορθογώνια παραλληλεπίπεδα με απειροστά μικρές βάσεις κάθετες στη διεύθυνση κίνησης. Ο όγκος καθενός από αυτά μικραίνει κατά τον παράγοντα $\sqrt{1-v^2/c^2}$ λόγω της "συστολής" της πλευράς της παράλληλης προς την κατεύθυνση της κίνησης. Οπότε και ο συνολικός όγκος γίνεται $V = V_0\sqrt{1-v^2/c^2}$.
(β) $n = N/V = N/(V_0\sqrt{1-v^2/c^2}) = n_0/\sqrt{1-v^2/c^2} = \gamma(v) n_0$

4. Ταξιδιώτης σε διαστημόπλοιο ταξιδεύει με ταχύτητα v=0.9999999999c προς μακρινό γαλαξία, που απέχει από τη Γη $L = 2 \times 10^6$ έτη φωτός. (α) Πόση απόσταση αντιλαμβάνεται ο ταξιδιώτης οτι έχει να διανύσει μέχρι να φτάσει στο γαλαξία αυτόν; (β) Πόσο χρόνο υπολογίζει οτι θα χρειαστεί αν διατηρήσει σταθερή την ταχύτητά του; (γ) Πόσο χρόνο θα διαρκέσει το ταξίδι κατά τον γήϊνο παρατηρητή;

Λύση: (α) $\sqrt{1-v^2/c^2} = \sqrt{1-(1-10^{-10})^2} \simeq \sqrt{2\times 10^{-10}} = \sqrt{2} \times 10^{-5}$. Οπότε, $L' = L\sqrt{1-v^2/c^2} \simeq 2 \times 10^6 \sqrt{2} \times 10^{-5} ly = 20\sqrt{2}\, ly$.
(β) Ο χρόνος που ξέρει οτι θα χρειαστεί είναι $T = L'/v \simeq L'/c = 20\sqrt{2} years$.
(γ) Ο παρατηρητής στη Γη βλέπει τον ταξιδιώτη να κινείται με ταχύτητα v, οπότε για να διανύσει την απόσταση L θα χρειαστεί χρόνο $T' = L/v = 2 \times 10^6 c\, years/0.9999999999\, c =$

$2\times 10^6 years/(1-10^{-10}) \simeq 2\times 10^6 years\times(1+10^{-10}) \simeq 2\times 10^6 years+2\times 10^{-4}\times 365\times 24h \simeq 2\times 10^6 years + 1.752h$.

5. Το Ρέθυμνο απέχει από το Ηράκλειο 75 km. Φανταστείτε οτι η ταχύτητα του φωτός ήτανε 150 km/h. Πόση ώρα θα κάνατε να φτάσετε με το αυτοκίνητό σας στο Ρέθυμνο, αν ταξιδεύατε με σταθερή ταχύτητα 75 km/h;

Λύση: Η απόσταση που θα είχατε να διανύσετε θα ήτανε όχι 75 km αλλά $D = 75km\sqrt{1-v^2/c^2} = 75km\sqrt{3}/2$. Οπότε θα χρειαζόσασταν χρόνο $T = L/v = 75km\sqrt{3}/(2\times 75km/h) = \sqrt{3}h/2 \simeq 0.866h \simeq 52min$.

ΛΥΣΕΙΣ ΣΕΙΡΑΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 2

Διδάσκων: Θ. Τομαράς

Δίδονται: Μάζα πρωτονίου $M_p \simeq 1GeV/c^2$, μάζα ηλεκτρονίου $m_e \simeq 0.5MeV/c^2$. Για $x << 1$ ισχύει ο προσεγγιστικός τύπος $(1-x)^{1/2} \simeq 1 - x/2$.
$1TeV = 10^3GeV = 10^9keV = 10^{12}eV$. $1MeV \simeq 1.6 \times 10^{-13}J$.

1. Ο επιταχυντής Large Hadron Collider (LHC) του CERN επιταχύνει σήμερα πρωτόνια, σε τελική ενέργεια E=4 TeV. Να υπολογισθούν (α) η κινητική ενέργεια των πρωτονίων, (β) η ορμή τους και (γ) η ταχύτητά τους με ακρίβεια 8ου δεκαδικού ψηφίου.

Λύση: (α) $K = E - m_pc^2 = 4000GeV - 1GeV = 3999GeV$
(β) $p = \sqrt{E^2 - m^2c^4}/c = \frac{E}{c}\sqrt{1-(mc^2/E)^2} = \frac{E}{c}\sqrt{1-1/(4\times 10^3)^2} \simeq \frac{E}{c} = 4TeV/c$.
(γ) Ισχύει $E = m_p\, c^2\, \gamma(v)$. Από αυτήν προκύπτει $\gamma = E/m_pc^2 = 4\times 10^3$. Οπότε $v^2/c^2 = 1 - 4000^{-2}$. Αρα $v/c = \sqrt{1-4000^{-2}} \simeq 1 - 0.312\times 10^{-7} \simeq 0.99999997$.

2. Πρωτόνιο των Κοσμικών Ακτίνων έχει ενέργεια E=10 GeV. Ζητούνται (α) η κινητική του ενέργεια K, (β) η ταχύτητά του με ακρίβεια τρίτου δεκαδικού ψηφίου, (γ) η ορμή του. (δ) Τί ταχύτητα για το πρωτόνιο αυτό προβλέπει ο τύπος της κινητικής ενέργειας του Νεύτωνα;

Λύση: (α) $K = E - mc^2 = 9GeV$.
(β) $\gamma \equiv 1/\sqrt{1-v^2/c^2} = E/mc^2 = 10$. Οπότε $v/c = \sqrt{1-10^{-2}} \simeq 1 - 0.5\times 10^{-2} \simeq 0.995$.
(γ) $p = Ev/c^2 \simeq 0.995 \times E/c \simeq 9.95GeV/c$.
(δ) $K = 9GeV = (1/2)mv_N^2 = (1/2)mc^2(v_N/c)^2 = (1/2)\times 1\,GeV(v_N/c)^2$. Δηλαδή $v_N/c = 3\sqrt{2} \gg 1$!!!!

3. Ραδιενεργός πυρήνας σε κάποιο εργαστήριο εκπέμπει φωτόνιο με ενέργεια E=10 MeV. Να υπολογίσετε (α) την ορμή του φωτονίου, (β) την συχνότητά του και (γ) την ταχύτητα του φωτονίου ως προς παρατηρητή κινούμενο με ταχύτητα V ως προς το εργαστήριο.

Λύση: (α) p=E/c=10 MeV/c.
(β) $h\nu = E = 10MeV$. Οπότε $\nu = 10\,MeV/h = 10\times 1.6\times 10^{-13}J/(6.63\times 10^{-34}Jsec) \simeq 2.41\times 10^{21}Hz$.
(γ) v=c.

4. *Μέτρηση της μάζας του νετρίνου*. Από έκκρηξη supernova σε απόσταση L από τη Γη παράχθηκαν φωτόνια και νετρίνα με την ίδια ενέργεια E. Τα νετρίνα έφτασαν στη Γη χρόνο T μετά τα φωτόνια. Να υπολογιστεί η μάζα m του νετρίνου, συναρτήσει των L, E, T και της ταχύτητας του φωτός c. Εφαρμογή: $L = 2\times 10^6 lyrs$, E=1MeV, T=1min.

Λύση: Από τον τύπο της ενέργειας $E = mc^2/\sqrt{1-v^2/c^2}$ παίρνουμε για την ταχύτητα v του νετρίνου $v/c \equiv \beta = \sqrt{1-m^2c^4/E^2}$. Οπότε, ο χρόνος που κάνει το νετρίνο να διανύσει απόσταση L είναι $t_\nu = L/v = L/c\beta$. Ο αντίστοιχος χρόνος t_γ για το φωτόνιο είναι $t_\gamma = L/c$. Η διαφορά $T = t_\nu - t_\gamma = (L/c)\Big(1/\sqrt{1-m^2c^4/E^2} - 1\Big)$. Λύνω ως προς τη μάζα του νετρίνου και παίρνω $m = (E/c^2)\sqrt{1-1/(1+cT/L)^2}$.

Εφαρμογή: $cT/L = 60sec \times c/2 \times 10^6 \times \pi \times 10^7 \times c \simeq 10^{-12} \ll 1$. Οπότε $mc^2 = E\sqrt{1-(1+cT/L)^{-2}} \simeq \sqrt{2}\,E\sqrt{cT/L} \simeq 1.4eV$.

5. Πυρηνικός αντιδραστήρας καταναλώνει 0.01 mole ραδιενεργού υλικού X, οι πυρήνες του οποίου διασπώνται σύμφωνα με την αντίδραση $X \to Y + A$, για να θερμάνει το νερό που περιέχει, μάζας $= 10^4 kg$. Δίδονται οι μάζες $m_X = 230.422 GeV/c^2$, $m_Y = 226.410 GeV/c^2$ και $m_A = 4.010 GeV/c^2$, αντίστοιχα, καθώς επίσης η ειδική θερμότητα $C = 4.19 kJ/kgr\,^oC$ του νερού. Υπολογίστε (α) την μεταβολή της θερμοκρασίας του νερού του αντιδραστήρα και (β) πόση ποσότητα πετρέλαιο εκτιμάτε ότι θα χρειαζόμασταν για να επιτύχομε το ίδιο αποτέλεσμα.

Λύση: (α) Η ενέργεια που εκλύεται από τη διάσπαση ενός πυρήνα X είναι $\Delta mc^2 \equiv (m_X - m_Y - m_A)c^2 = 0.002 GeV = 2 MeV$. Εξισώνω την ενέργεια που προσφέρεται στο νερό από τη διάσπαση όλων των διαθέσιμων πυρήνων, με αυτήν που χρειάζεται για να αλλάξει η θερμοκρασία του κατά $\Delta\theta$ και παίρνω $E = 10^{-2} N_A \Delta mc^2 = MC\Delta\theta$. Οπότε, $\Delta\theta = 10^{-2} N_A \Delta mc^2/MC = 10^{-2} \times 6 \times 10^{23} \times 2MeV/(10^7 gr \times 4.18 J/gr/^o C) = (6 \times 2 \times 1.6 \times 10\ ^oC)/4.18 = 45.9\ ^oC$.

(β) Για να έχω το ίδιο αποτέλεσμα στη θερμοκρασία του νερού κάνοντας χρήση πετρελαίου πρέπει να κάψουμε μάζα πετρελαίου M' τόση ώστε να ισχύει $KM' = E = 10^{-2} \times 6 \times 10^{23} \times 2 \times 1.6 \times 10^{-13} J = 1.92 \times 10^9 J$, όπου K είναι η ενέργεια ανά μονάδα μάζας, που εκλύεται κατά την καύση του πετρελαίου. Οπότε, $M' = 1.92 \times 10^9 J/K$.

Βρείτε μόνοι σας από πίνακες μια λογική τιμή του K, που χρειάζεται για τον παραπάνω υπολογισμό.

6. Ασκηση 15 του $Serway$, σελίδα 34.

Παίρνω τα A και B να πλησιάζουν τη Γη από τον αρνητικό άξονα των x. Τότε $v_A = 0.5c$ και $v_B = 0.8c$. Η ταχύτητα v' με την οποία βλέπει ο B να κινείται ο A είναι

$$v' = \frac{v_A - v_B}{1 - v_A v_B/c^2} = \frac{0.5c - 0.8c}{1 - 0.4} = -0.5c \tag{1}$$

7. Ασκηση 31, του $Serway$, σελίδα 35.

(α) Αν $L_x = L_0 \cos\theta_0$ και L_y είναι τα μήκη των προβολών της ράβδου στους άξονες x και y κατά τον παρατηρητή στο σύστημα ηρεμίας της ράβδου, ο παρατηρητής ως προς τον οποίο η ράβδος κινείται μετράει $L'_x = L_x\sqrt{1 - v^2/c^2}$ και $L'_y = L_y$, αντίστοιχα. Επομένως, το μήκος που μετράει αυτός είναι

$$L = \sqrt{L'^2_x + L'^2_y} = \sqrt{L_x^2(1 - v^2/c^2) + L_y^2} = \sqrt{L_0^2 - L_x^2 v^2/c^2} = L_0\sqrt{1 - v^2\cos^2\theta_0/c^2} \tag{2}$$

(β)

$$\tan\theta = \frac{L'_y}{L'_x} = \frac{L_y}{L_x\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\tan\theta_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma\tan\theta_0 \tag{3}$$

ΛΥΣΕΙΣ ΣΕΙΡΑΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 3

Διδάσκων: Θ. Τομαράς

1. Ξεκινώντας από τους τύπους της ενέργειας και της ορμής σώματος μάζας m που κινείται στην κατεύθυνση του άξονα των x με ταχύτητα v, να αποδείξετε τους τύπους για την ενέργεια E' και την ορμή p'_x ως προς παρατηρητή με σχετική ταχύτητα V, επίσης στην κατεύθυνση x ως προς τον αρχικό. Να δείξετε οτι οι ποσότητες (E, cp_x) μετασχηματίζονται κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz όπως ακριβώς οι (ct, x), ήτοι

$$E' = \frac{E - (V/c)cp_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,, \quad cp'_x = \frac{cp_x - (V/c)E}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,. \tag{1}$$

Λύση:

$$\begin{aligned} E' &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} = mc^2 \frac{1}{\sqrt{1 - (v - V)^2/c^2(1 - vV/c^2)^2}} \\ &= \frac{mc^2(1 - vV/c^2)}{\sqrt{1 - v^2/c^2 - (V^2/c^2)(1 - v^2/c^2)}} = \frac{mc^2 - (V/c)cmv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ &= \frac{E - (V/c)cp_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,, \end{aligned} \tag{2}$$

που έχει ακριβώς την ίδια μορφή με την σχέση μετασχηματισμού του χρόνου

$$ct' = \frac{ct - (V/c)x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \tag{3}$$

Ομοίως και για τη σχέση μετασχηματισμού της p_x.

2. Ηλεκτρόνιο μάζας m και ηλεκτρικού φορτίου q αφήνεται από τη θέση x=0 και με αρχική ταχύτητα v=0 μέσα σε γραμμικό επιταχυντή με ομογενές και σταθερό ηλεκτρικό πεδίο έντασης E με qE/m = w =σταθερά. (α) Να υπολογισθεί και να σχεδιαστεί η επιτάχυνσή του a(t). Σχολιάστε τα βασικά χαρακτηριστικά της καμπύλης που σχεδιάσατε. Πώς συμπεριφέρεται για μικρούς χρόνους και πώς για μεγάλους; (β) Να χρησιμοποιήσετε τον τύπο μετασχηματισμού της επιτάχυνσης για να υπολογίσετε την επιτάχυνση του φορτίου ως προς το σύστημα ηρεμίας του. (γ) Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια του φορτίου στη θέση x=L/2, τόσο ως προς το σύστημα ηρεμίας του, όσο και ως προς το σύστημα του εργαστηρίου.

Λύση: (α) Η εξίσωση του Νεύτωνα dp/dt=F=qE γράφεται

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) = w \tag{4}$$

απ' όπου

$$v(t) = \frac{wt}{\sqrt{1 + w^2t^2/c^2}}\,. \tag{5}$$

Η επιτάχυνση είναι

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{w}{(1 + w^2t^2/c^2)^{3/2}} \tag{6}$$

(β) Η επιτάχυνση ως προς το σύστημα ηρεμίας του φορτίου είναι [1]

$$a'(t) = a(t)\left(1 - \frac{v(t)^2}{c^2}\right)^{-3/2}, \tag{7}$$

από την οποία με αντικατάσταση των παραπάνω a(t) και v(t) προκύπτει

$$a'(t) = w = \text{constant} \tag{8}$$

(γ) Η μεταβολή στην ενέργεια του ηλεκτρονίου από την αρχική μέχρι τη θέση x=L/2 ισούται με το έργο W=FL/2=qEL/2, που πρόσφερε μέχρι τότε σε αυτό η εξωτερική δύναμη. Αφού το ηλεκτρόνιο ξεκίνησε ακίνητο, η αρχική ενέργειά του ήταν η ενέργεια ηρεμίας mc^2. Επομένως, η κινητική του ενέργεια στη θέση x=L/2 είναι K=qEL/2.

Ως προς το σύστημα ηρεμίας του το ηλεκτρόνιο έχει εξ' ορισμού ταχύτητα μηδέν. Επομένως και η κινητική του ενέργεια είναι μηδέν.

3. Δύο σωμάτια με μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα, έχουν ενέργειες και ορμές $(E_1, \mathbf{p}_1)$ και $(E_2, \mathbf{p}_2)$. (α) Να υπολογίσετε συναρτήσει αυτών την ενέργεια του κέντρου μάζας E_{cm} του συστήματος των δύο μαζών. (β) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του συστήματος ΚΜ ως προς το αρχικό. (γ) Να γενικεύσετε τα παραπάνω ερωτήματα για N σώματα.

Λύση: (α) Η συνολική ενέργεια και ορμή του συστήματος των δύο σωμάτων στο σύστημα του εργαστηρίου είναι $E = E_1 + E_2$ και $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$, ενώ στο σύστημα Κέντρου Μάζας η συνολική ορμή είναι εξ' ορισμού μηδέν $\mathbf{P}_{cm} = 0$ και η ολική ενέργεια έστω E_{cm}. Δεδομένου οτι τα δύο συστήματα συνδέονται με μετασχηματισμό Lorentz, ισχύει

$$E_{cm}^2 - \mathbf{P}_{cm}^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 c^2 \tag{9}$$

από την οποία

$$E_{cm} = \sqrt{(E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 c^2}\,. \tag{10}$$

(β) Για να πάμε από το αρχικό στο σύστημα ΚΜ πρέπει να κάνουμε ένα μετασχηματισμό Lorentz, που θα κάνει τη συνολική ορμή $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \to 0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορώ να ονομάσω $x \equiv x'$ την κατεύθυνση της ολικής ορμής $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = |\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2|\hat{\mathbf{x}}$, όπου $\hat{\mathbf{x}}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση x. Χρησιμοποιώ τον τύπο μετασχηματισμού της ορμής όταν η σχετική ταχύτητα είναι στην κατεύθυνση x, $p' = (p - VE/c^2)/\sqrt{1 - V^2/c^2}$ και γράφω για την περίπτωση που με ενδιαφέρει $0 = (|\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2| - V(E_1 + E_2)/c^2)/\sqrt{1 - V^2/c^2}$. Οπότε τελικά

$$V = \frac{|\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2|c^2}{E_1 + E_2} \tag{11}$$

ή με πλήρη διανυσματική μορφή

$$\mathbf{V} = \frac{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)c^2}{E_1 + E_2} \tag{12}$$

(γ) Προφανώς, γενικά ισχύει

$$E_{cm} = \sqrt{(E_1 + E_2 + ... + E_N)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + ... + \mathbf{p}_N)^2 c^2} \tag{13}$$

και

$$\mathbf{V} = \frac{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + ... + \mathbf{p}_N)c^2}{E_1 + E_2 + ... + E_N} \tag{14}$$

[1] Χρησιμοποιώ τον τύπο μετασχηματισμού της επιτάχυνσης με σχετική ταχύτητα τη στιγμή t την στιγμιαία ταχύτητα v(t) του φορτίου.

4. Ενα πιόνιο π^0 με μάζα $= 140MeV/c^2$ και ορμή P=280 MeV/c διασπάται σε δύο φωτόνια $\pi^0 \to \gamma + \gamma$, που σχηματίζουν την ίδια γωνία θ με την αρχική κατεύθυνση του πιονίου. Να υπολογίσετε (α) την ταχύτητα του πιονίου, (β) τη συχνότητα του κάθε φωτονίου και (γ) τη γωνία θ.

Λύση: (α) Η ενέργεια του πιονίου είναι $E = \sqrt{P^2c^2 + M^2c^4} = 140\sqrt{5}MeV$. Οπότε από τη σχέση $E = Mc^2/\sqrt{1 - v^2/c^2} = 140MeV/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ βρίσκω $1 - v^2/c^2 = 1/5$. Δηλαδή $v = 2\,c/\sqrt{5}$.

(β) Πρέπει να υπολογίσω τις ενέργειες των φωτονίων. Η διάσπαση γίνεται σε ένα επίπεδο το οποίο παίρνω να είναι το επίπεδο x-y, με τον άξονα x στην κατεύθυνση της ορμής του πιονίου. Ονομάζω E_1 και E_2 τις ενέργειες των φωτονίων και p_1 και p_2 τα μέτρα των ορμών τους. E και P είναι η ενέργεια και η ορμή του πιονίου. Διατήρηση ενέργειας και ορμής δίνουν:

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 &= E \\ (p_1 + p_2)\cos\theta &= P \\ p_2 \sin\theta &= p_2 \sin\theta \end{aligned} \tag{15}$$

με (E,P) την ενέργεια και το μέτρο της ορμής του π^0.

Η τρίτη εξίσωση δίνει $p_1 = p_2$. Οπότε, αφού τα σωμάτια 1 και 2 είναι φωτόνια (έχουν την ίδια μάζα) θα ισχύει $E_1 = E_2$. Αρα, $E_1 = E_2 = E/2 = 70\sqrt{5}MeV$ και $f_1 = f_2 = 70\sqrt{5}MeV/h = 2.36 \times 10^{22}Hz$.

(γ) Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις παίρνω

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{P}{2p_1} = \frac{Pc}{2E_1} = \frac{\sqrt{E^2 - M^2c^4}}{E} = \sqrt{1 - \frac{M^2c^4}{E^2}} \\ &= \sqrt{1 - \frac{140^2}{5 \times 140^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}\,. \end{aligned} \tag{16}$$

5. Δύο παρατηρητές Σ1 και Σ2 με σχετική ταχύτητα V=0.5 c στην κατεύθυνση του κοινού άξονα των z έχουν ρυθμίσει τα ρολόγια τους να δείχνουν $t_1 = t_2 = 0$ τη στιγμή που συμπίπτουν οι αρχές των αξόνων τους $z_1 = z_2 = 0$. Οι Σ1 και Σ2 παρακολουθούν τη κίνηση ενός σώματος. Σύμφωνα με τον Σ1 το σώμα κατά τη χρονική στιγμή $t_1 = 1sec$ βρίσκεται στη θέση $(x_1 = 10^8m, y_1 = 40m, z_1 = 2 \times 10^8m)$. Τί χωροχρονικές συντεταγμένες για το γεγονός αυτό μετράει ο Σ2;

Λύση: Στους τύπους των μετασχηματισμών Lorentz αντικαθιστάτε τις συντεταγμένες (x_1, y_1, z_1, t_1) που δίδονται, και υπολογίζετε τις $(x_2 = x_1, y_2 = y_1, z_2, t_2)$.

Οπότε, $z_2 = (z_1 - Vt_1)/\sqrt{1 - V^2/c^2} = (2 \times 10^8 - 0.5 \times 3 \times 10^8 \times 1)m/\sqrt{1 - 1/4} = 10^8m/\sqrt{3}$.

Επίσης, $t_2 = \gamma(V)(t_1 - V\,z_1/c^2) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(1sec - 0.5 \times 2\, \times \frac{10^8m}{3\times10^8m/sec}\right) = \frac{4}{3\sqrt{3}}\,sec.$

6. *Ταχυόνια και αιτιότητα*. (α) Σχεδιάστε δύο συστήματα αξόνων, που παριστούν τα συστήματα δύο παρατηρητών Σ και Σ' με σχετική ταχύτητα V και των οποίων οι αρχές των αξόνων συμπίπτουν όταν t=t'=0. (β) Σχεδιάστε τον κώνο φωτός φωτεινής δέσμης που εκπέμπεται απο το σημείο (x=0, t=0). (γ) Σχεδιάστε την τροχιά υλικού σημείου που δημιουργείται στο σημείο O=(0,0), κινείται με σταθερή ταχύτητα και εξαφανίζεται στο σημείο $= (x_A, t_A)$. (δ) Θεωρείστε σωμάτιο που μπορεί να κινηθεί *με ταχύτητα μεγαλύτερη αυτής του φωτός*. Δείξτε οτι υπάρχουν αδρανειακοί παρατηρητές, ως προς τους οποίους η εξαφάνιση του σωματίου προηγείται της γέννησής του (*Παραβίαση της σχέσης αιτίου - αποτελέσματος*)

Σημειώματα

Σημείωμα αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης