Λογική

Δημήτρης Πλεξουσάκης

Φροντιστήριο 6:
Προτασιακός Λογισμός: Μέθοδος Επίλυσης

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

Χρηματοδότηση

1. Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.

2. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

3. Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

A) ΘΕΩΡΙΑ
Μέθοδος Επίλυσης (Resolution)

Στη μέθοδο της επίλυσης αποδεικνύουμε την ικανοποιησιμότητα ενός συνόλου προτάσεων, βασιζόμενοι στην εγκυρότητα μιας σειράς από εξαγωγές συμπερασμάτων της παρακάτω μορφής:

Για απλοποίηση, η παραπάνω επίλυση γράφεται ως . Αναπαριστούμε δηλαδή διαζεύξεις ως σύνολα γραμμάτων .

Η αρχή της επίλυσης ορίζει το εξής: Έστω S ένα σύνολο όρων και R(S) το σύνολο που προκύπτει αν προσθέσουμε στο S όλους τους όρους επίλυσης των μελών του. Τότε το S είναι ικανοποιήσιμο αν και μόνο αν το R(S) είναι ικανοποιήσιμο.

Άρα για να εφαρμόσουμε τη μέθοδο επίλυσης για να αποδείξουμε την ικανοποιησιμότητα ενός συνόλου προτάσεων, προσπαθούμε να μετατρέψουμε τις προτάσεις σε σύνολα διαζεύξεων. Αυτό γίνεται μετατρέποντας τις προτάσεις του συνόλου σε CNF και στη συνέχεια διαχωρίζοντας τις διαζεύξεις (κάθε διάζευξη αποτελεί ένα όρο). Έχοντας παράγει το σύνολο όρων S, δημιουργούμε το σύνολο R(S) σύμφωνα με την παραπάνω αρχή της επίλυσης και εξετάζουμε την ικανοποιησιμότητα αυτού του συνόλου.

Η διαδικασία επίλυσης μπορεί να αναπαρασταθεί και ως δυαδικό δέντρο, όπου κάθε φύλλο είναι όρος του συνόλου S και κάθε κόμβος που δεν είναι φύλλο, προκύπτει από την επίλυση των άμεσων απογόνων του. Ένα τέτοιο δέντρο ονομάζεται δέντρο επίλυσης. Στην περίπτωση που η ρίζα του δέντρου είναι το F, το δέντρο ονομάζεται δέντρο ανασκευής. Για τη συστηματική κατασκευή ενός δέντρου ανασκευής, υπάρχει ο εξής αλγόριθμος (που υπάρχει και στις σημειώσεις του μαθήματος):

Input: ένα σύνολο όρων S

Output: αν το S είναι μη-ικανοποιήσιμο, ένα δέντρο ανασκευής για το S, διαφορετικά μήνυμα για τη μη-εύρεση δέντρου.

1. Αν για κάποιο γράμμα A, το A και το $\neg A$ είναι μέλη του S, τότε ο αλγόριθμος τερματίζει επιστρέφοντας το δέντρο ανασκευής:

   A ¬ A

   F

2. Αν κάθε όρος του S περιέχει ένα αρνητικό γράμμα, τότε ο αλγόριθμος τερματίζει και δίνει ως αποτέλεσμα ένδειξη αποτυχίας.

3. Έστω ένας όρος του S όπου κάθε είναι θετικό και έστω i:=1.

4. Αν , τότε έστω το δέντρο με μόνο κόμβο το . Πήγαινε στο βήμα 8.

5. Για κάθε όρο , έστω . Το καλείται αντίστοιχος όρος του . Αν . Έστω . (δηλαδή ένα

νέο σύνολο που προκύπτει από το S, αν από κάθε όρο αφαιρέσουμε το).

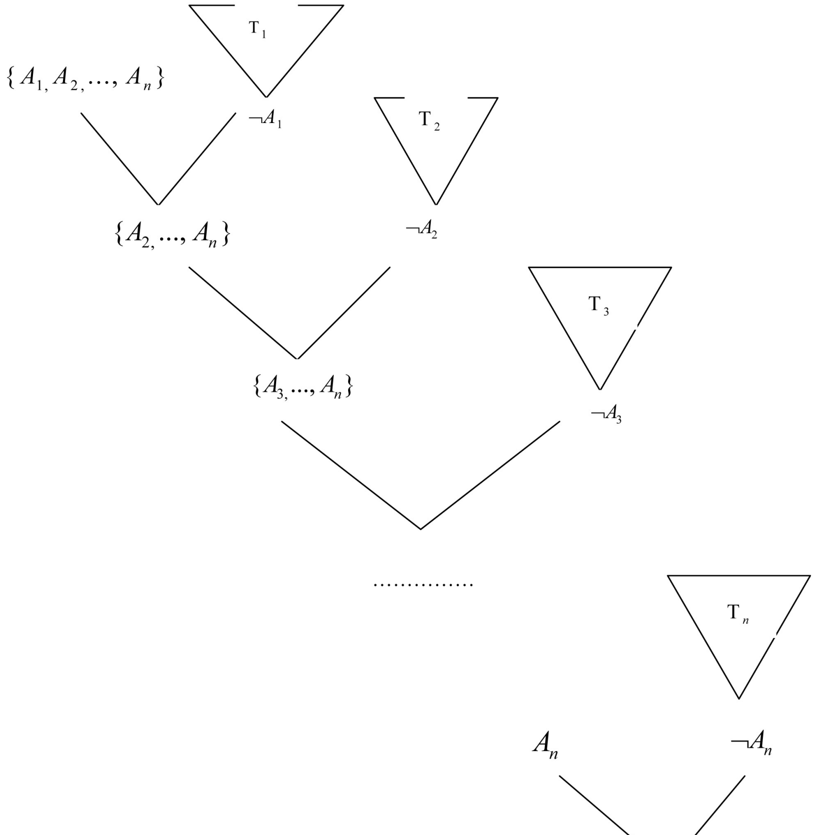
6. Καλούμε αναδρομικά τον αλγόριθμο με είσοδο . Αν ο αλγόριθμος επιστρέψει «αποτυχία», τότε επιστρέφουμε «αποτυχία» και τερματίζουμε. Αλλιώς, ο αλγόριθμος επιστρέφει το δέντρο ανασκευής και συνεχίζει στο βήμα 7.

7. Έστω το δέντρο που προκύπτει από το με την αντικατάσταση κάθε φύλλου του με τον όρο του S του οποίου είναι αντίστοιχος και αναμορφώνουμε το δέντρο. Αν η ρίζα του είναι F, πήγαινε στο βήμα 10.

8. Αν , τότε και πήγαινε στο βήμα 4. Διαφορετικά πήγαινε στο βήμα 9.

9. Επιστρέφουμε το δέντρο που φαίνεται παρακάτω και τερματίζουμε.

10. Καλούμε αναδρομικά τον αλγόριθμο με είσοδο .



B) ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Χρησιμοποιείστε τη μέθοδο επίλυσης για να εξετάσετε την ικανοποιησιμότητα του παρακάτω συνόλου:

Η πρώτη πρόταση γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

Η δεύτερη και η τρίτη πρόταση γράφονται ισοδύναμα ως εξής:

Η τελευταία πρόταση είναι σύζευξη δύο γραμμάτων. Άρα αντιστοιχεί σε δύο ξεχωριστούς όρους, τους και . (Η πρόταση είναι ήδη σε CNF, ως σύζευξη δύο «διαζεύξεων» όπου κάθε «διάζευξη» είναι απλά ένα γράμμα).

Άρα έχουμε το εξής σύνολο όρων:

Σχηματίζουμε όρους επίλυσης από τους παραπάνω όρους:

Σύμφωνα με την αρχή της επίλυσης, το σύνολο R(S), που αποτελείται από τους όρους του R(S) συν τους παραπάνω όρους επίλυσης, είναι το εξής:

Το σύνολο R(S) είναι μη ικανοποιήσιμο, αφού δε μπορεί να είναι ταυτόχρονα αληθείς η και η . Άρα σύμφωνα με τη αρχή της επίλυσης και το αρχικό σύνολο S είναι μη ικανοποιήσιμο.
Εναλλακτικά, μπορούμε να αναπαραστήσουμε τη διαδικασία με το παρακάτω δέντρο επίλυσης:

ΠΡΟΣΟΧΗ: Η επίλυση όρων της μορφής , καταλήγει σε **T** αφού:

2) Κατασκευάστε δέντρο ανασκευής για να αποδείξετε ότι το παρακάτω σύνολο είναι μη ικανοποιήσιμο:

Από τις παραπάνω προτάσεις προκύπτει το εξής σύνολο όρων:

Δημιουργούμε το παρακάτω δέντρο ανασκευής:

3) Χρησιμοποιείστε τον αλγόριθμο κατασκευής δέντρων ανασκευής για να ελέγξετε την ικανοποιησιμότητα του παρακάτω συνόλου:

1. Δεν υπάρχουν αντίθετα γράμματα στο
2. Υπάρχει ένας όρος, ο που έχει μόνο θετικά γράμματα.
3. **, i:=1,** δηλαδή εξετάζουμε πρώτα το γράμμα .
4. Ελέγχουμε αν το υπάρχει ως όρος στο S.
5. Δημιουργούμε το σύνολο που προκύπτει αν αφαιρέσουμε τον όρο C από το S και αν από κάθε όρο που απομένει, αφαιρέσουμε το γράμμα
6. Καλούμε αναδρομικά τον αλγόριθμο με είσοδο το **.**

    1'. Το περιέχει αντίθετους όρους άρα ο αλγόριθμος επιστρέφει το δέντρο :

7. Αντικαθιστούμε τα φύλλα του δέντρου με τους αντίστοιχους όρους από το σύνολο S και καταλήγουμε στο εξής δέντρο :

8. , οπότε , δηλαδή εξετάζουμε τώρα το γράμμα Q από τον όρο **.** Πάμε στο βήμα 4.
4. Ελέγχουμε αν το υπάρχει ως όρος στο S.
5. Δημιουργούμε το σύνολο που προκύπτει αν αφαιρέσουμε τον όρο C από το S και αν από κάθε όρο που απομένει, αφαιρέσουμε το γράμμα
6. Καλούμε αναδρομικά τον αλγόριθμο με είσοδο το **.**

    1'. Το δεν περιέχει αντίθετους όρους.

    2'. Υπάρχει όρος με μόνο θετικά γράμματα.

    3'. , m:=1.

    4'.

    5'. Δημιουργούμε το σύνολο **,** που προκύπτει αν αφαιρέσουμε τον όρο C' από το και αν από κάθε όρο που απομένει, αφαιρέσουμε το γράμμα

    6'. Καλούμε αναδρομικά τον αλγόριθμο με είσοδο

1''. Το περιέχει αντίθετους όρους άρα ο αλγόριθμος επιστρέφει το δέντρο :

7'. Αντικαθιστούμε τα φύλλα του δέντρου με τους αντίστοιχους όρους από το σύνολο και καταλήγουμε στο εξής δέντρο :

8'. , οπότε συνεχίζουμε στο βήμα 9'.
9'. Επιστρέφουμε το δέντρο ανασκευής

7. Αντικαθιστούμε τα φύλλα του δέντρου με τους αντίστοιχους όρους από το σύνολο και καταλήγουμε στο εξής δέντρο :

8. , οπότε συνεχίζουμε στο βήμα 9.
9. Επιστρέφουμε το παρακάτω δέντρο:

Αφού ο αλγόριθμος κατέληξε στην κατασκευή δέντρου ανασκευής, το σύνολο S είναι μη-ικανοποιήσιμο.