Λογική

Δημήτρης Πλεξουσάκης

Ασκήσεις στον Κατηγορηματικό Λογισμό

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

Χρηματοδότηση

1. Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
2. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
3. Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ασκήσεις στον Κατηγορηματικό Λογισμό

1) Θεωρείστε την ερμηνεία (D,I) της γλώσσας L όπου D = {-1, 0, 1} και I συνάρτηση ερμηνείας για την οποία:
I(c) = 0,
I(e) = 1,
I(f): (m,n) → m+n αν m≠n, διαφορετικά m ,
I(g): (m,n) → m*n,
I(h): m → -m
I(Q) = {0,1}
I(R) = {(0,1), (-1,0), (1,-1)}
I(S) = {(1,-1), (-1,1)}
Με βάση αυτή την ερμηνεία, εξηγείστε αν τα παρακάτω σχήματα είναι αληθή ή ψευδή:

a)
Σύμφωνα με τη θεωρία για να είναι αληθές το παραπάνω σχήμα για την ερμηνεία (D,I), θα πρέπει η εκτεταμένη ερμηνεία του σχήματος που δεσμεύεται από το να περιλαμβάνει ολόκληρο το σύνολο D, δηλαδή

Οπότε πρέπει να κατασκευάσουμε σταδιακά την εκτεταμένη ερμηνεία και αν τελικά καταλήξουμε σε D τότε το αρχικό σχήμα είναι αληθές, αλλιώς είναι ψευδές. Έχουμε τα εξής:
(1)
Για να βρούμε το τελευταίο σύνολο θα πρέπει να κρατήσουμε σταθερό το x (το *) και για κάθε δυνατή τιμή να δούμε αν υπάρχει τουλάχιστον μια τιμή του y που ικανοποιεί την πρόταση. Έχουμε:

- x=-1:
- x=0:
- x=1:

Άρα το τελευταίο σύνολο είναι {-1,0,1} και επομένως συνεχίζοντας από (1) έχουμε:
.
Συνεπώς το αρχικό σχήμα είναι αληθές.

b)
Όπως και στο προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι

Έχουμε ότι
Όπως και πριν, για να υπολογίσουμε το σύνολό αυτό θα πρέπει να κρατήσουμε σταθερό το x (το *) και για κάθε δυνατή τιμή να δούμε αν υπάρχει τουλάχιστον μια τιμή του y που ικανοποιεί την πρόταση. Έχουμε:

- x=-1:

Δε χρειάζεται να ελέγξουμε τα υπόλοιπα x, διότι αρκεί μία περίπτωση για να παραβιαστεί το «για κάθε x». Επομένως το αρχικό σχήμα είναι ψευδές.

c)
Εδώ έχουμε ότι

Έχουμε τα εξής:
(1)
Για να υπολογίσουμε το τελευταίο σύνολο έχουμε:

- x=-1:
- x=0:
- x=1:

Άρα το τελευταίο σύνολο είναι {-1,0} και επομένως συνεχίζοντας από (1) έχουμε:
.
Συνεπώς το αρχικό σχήμα είναι αληθές.

d)
Εδώ έχουμε ότι

Πρέπει να βρούμε τουλάχιστον ένα , τέτοιο ώστε για κάθε και για τουλάχιστον ένα **.** Εξετάζουμε πρώτα την πρώτη περίπτωση. Για y=-1 και η μόνη περίπτωση να ικανοποιείται είναι για f(x,-1)=-1, δηλαδή x-1=-1, οπότε **x=0.** Όμως το ίδιο μπορεί να ισχύει και για **x=-1**, αφού τότε τα δύο ορίσματα της f είναι ίσα.
Για y=0 και η μόνη περίπτωση να ικανοποιείται είναι για f(x,0)=-1, δηλαδή x+0=-1, οπότε **x=-1.**
Για y=1 και η μόνη περίπτωση να ικανοποιείται είναι για f(x,1)=-1, δηλαδή x+1=-1, οπότε x=-2, κάτι που είναι αδύνατο αφού . Άρα το αρχικό σχήμα είναι ψευδές.

e)
Πρέπει να βρω ένα οποιοδήποτε ζεύγος (x,y) με και τέτοιο ώστε και **.**
Από το δεύτερο συμπεραίνουμε ότι το y πρέπει να είναι είτε 0 είτε 1.
Για y=0 έχουμε **.** Μια πιθανή ερμηνεία είναι για f(x,0)=1 και g(0,x)=-1. Το δεύτερο είναι αδύνατο για οποιοδήποτε x αφού θα πρέπει 0*x=-1. Για τον ίδιο λόγο, η ερμηνεία f(x,0)=-1 και g(0,x)=1 είναι κι αυτή αδύνατη.
Για y=1 έχουμε **.** Η ερμηνεία f(x,1)=1 και g(1,x)=-1απορρίπτεται όπως και προηγουμένως, οπότε εξετάζουμε μόνο την περίπτωση f(x,1)=-1 και g(1,x)=1. Από το δεύτερο έχουμε x=1 το οποίο όμως δεν ικανοποιεί το πρώτο αφού 1+1≠-1
Επομένως το αρχικό σχήμα είναι ψευδές.

f)
Εδώ κινούμαστε όπως στα πρώτα ερωτήματα, οπότε έχουμε ότι

Έχουμε ότι
Όπως και πριν, για να υπολογίσουμε το σύνολό αυτό θα πρέπει να κρατήσουμε σταθερό το x (το *) και για κάθε δυνατή τιμή να δούμε αν υπάρχει τουλάχιστον μια τιμή του y που ικανοποιεί την πρόταση. Έχουμε:

- x=-1:
- x=0:
- x=1:

Επομένως το αρχικό σχήμα είναι αληθές.

2) Ελέγξτε την ικανοποιησιμότητα των ακόλουθων συνόλων σχημάτων. Δώστε κατάλληλο μοντέλο για τα ικανοποιήσιμα σύνολα.

a)

Διαισθητικά φαίνεται ότι το σύνολο είναι μη-ικανοποιήσιμο γιατί αν υπάρχει x που ικανοποιεί το P(x), τότε θα ικανοποιείται και το Q(x) και άρα δε θα ικανοποιείται το τελευταίο σχήμα.

Πιο τυπικά, έστω (D,I) η ερμηνεία που ικανοποιεί τα δύο πρώτα σχήματα του συνόλου (και). Άρα I'(P(_))≠, από το πρώτο σχήμα και από το δεύτερο ή και . Εφόσον I'(P(_))≠, η πρώτη περίπτωση δεν ισχύει, άρα και . Όμως για να ικανοποιείται και το τρίτο σχήμα από την ίδια ερμηνεία θα πρέπει I'(Q(_))=, που είναι αντίθετο με το . Συνεπώς το σύνολο είναι μη-ικανοποιήσιμο.

b)

Διαισθητικά βλέπουμε ότι το σύνολο είναι ικανοποιήσιμο, αφού χρειάζεται απλά ένα ζεύγος x,y που να ικανοποιεί το Q και επιπλέον το x να ικανοποιεί το P, και το y την R.
Έστω η ερμηνεία (D,I) με D={0,1}, I(a)={0} (θεωρούμε την α σταθερά), I(P)={0}, I(R)={1} και I(Q)={(0,1)}. Εξετάζουμε αν είναι μοντέλο του συνόλου. Για το πρώτο σχήμα έχουμε ότι για x=0, το P γίνεται αληθές και για y=1 γίνεται και το Q αληθές, άρα ικανοποιείται. Το ίδιο συμβαίνει και για x=1 αφού το P γίνεται ψευδές και άρα η συνεπαγωγή είναι αληθής. Επομένως η ερμηνεία είναι μοντέλο του πρώτου σχήματος.
Για το δεύτερο σχήμα πρέπει να εξετάσουμε τους 4 δυνατούς συνδυασμούς:
(x,y)=(0,0): H Q(x,y) ψευδής, άρα η συνεπαγωγή αληθής
(x,y)=(0,1): H Q(x,y) αληθής και η R(y) αληθής, άρα η συνεπαγωγή αληθής
(x,y)=(1,0): H Q(x,y) ψευδής, άρα η συνεπαγωγή αληθής
(x,y)=(1,1): H Q(x,y) ψευδής, άρα η συνεπαγωγή αληθής
Τέλος για το τρίτο σχήμα έχουμε ότι πρέπει να είναι αληθής η , που βάσει της ερμηνείας είναι. Άρα το σύνολο είναι ικανοποιήσιμο.