ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Διάλεξη 12η: Σήματα Ισχύος και Μετασχηματισμός Fourier

Ιωάννης Στυλιανού
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY215

Διάλεξη 12

$x(t) = 5 \quad \forall t$

$\times \quad \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt < \infty}$

- $x(t) = \cancel{5}\, A \quad \forall t \xrightarrow{F} X(f) = \cancel{5}\, A \cdot \delta(f)$

- $A e^{j2\pi f_0 t} \xrightarrow{F} X(f) = A \cdot \delta(f - f_0)$

- $sgn(t) \xleftrightarrow{F} \dfrac{1}{j\pi f}$

Ισχύει

$$x(t) = x_0(t) + \bar{x} \qquad (1)$$

$x_0(t)$: σήμα μηδενικής μέσης τιμής

$$\bar{x} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt \qquad \text{μέση τιμή}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} = \frac{dx_0(t)}{dt} \qquad (2)$$

$$(1) \Rightarrow X(f) = X_0(f) + \bar{x}\,\delta(f) \qquad (3)$$

$$F\left\{\frac{dx_0(t)}{dt}\right\} = j2\pi f\, X_0(f) \Rightarrow X_0(f) \overset{(2)}{=} \frac{1}{j2\pi f} F\left\{\frac{dx_0(t)}{dt}\right\} \qquad (4)$$

(3) & (4) :

$$\boxed{X(f) = \frac{1}{j2\pi f} F\left\{\frac{dx_0(t)}{dt}\right\} + \bar{x}\,\delta(f)}$$

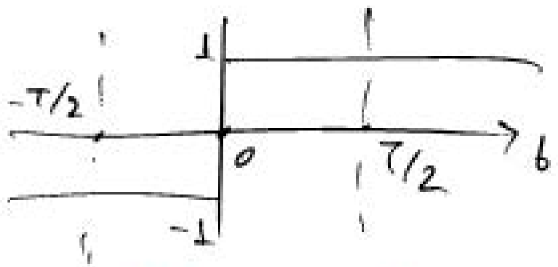
▷ $x(t) = C \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= C \Rightarrow \\ x(t) &= x_0(t) + \bar{x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &x_0(t) = 0 \;\; \forall t \Rightarrow \frac{d x_0(t)}{dt} = 0 \\ &\bar{x} = C \end{aligned}$$

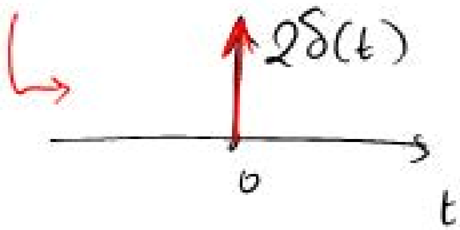
$$X(f) = \frac{1}{j2\pi f} \underbrace{F\left\{\frac{d x_0(t)}{dt}\right\}}_{\to 0} + \underbrace{\bar{x}}_{\to C}\,\delta(f) = c \cdot \delta(f)$$

▷

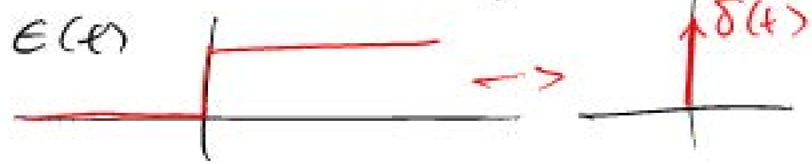
$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{sgn}(t) \\ x(t) &= x_0(t) + \bar{x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &x_0(t) = \operatorname{sgn}(t) \Rightarrow \frac{d\, x_0(t)}{dt} = 2\delta(t) \\ &\bar{x} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt = 0 \end{aligned}$$



$\frac{d}{dt}$



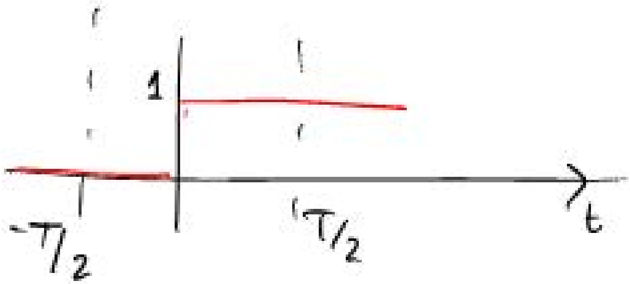
$$\left\{ \frac{d\epsilon(t)}{dt} = \delta(t) \right\}$$



$$X(f) = \frac{1}{j2\pi f} \underbrace{F\left\{\frac{d x_0(t)}{dt}\right\}}_{\to 2 \;\; \forall f} + \underbrace{\bar{x}}_{\to 0}\,\delta(f) = \frac{1}{j\pi f}$$

$\triangleright\ x(t) = \varepsilon(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(t) + \frac{1}{2}$

$$x(t) = x_0(t) + \bar{x}$$



$$\bar{x} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\cancel{T}}\,\frac{\cancel{T}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$X(f) = X_0(f) + \bar{x}\,\delta(f)$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{j\pi f} + \frac{1}{2}\,\delta(f)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \delta(t) \Rightarrow j2\pi f\,X(f) = 1 \Rightarrow X(f) = \frac{1}{j2\pi f}$$

Σήματα ενέργειας: $\varphi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)\, y(t+\tau)\, dt$

$$\Phi_{xy}(f) = X^*(f)\, Y(f)$$

$$\Phi_x(f) = X^*(f)\, X(f) = |X(f)|^2$$

Σήματα Ισχύος: $\varphi_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t)\, y(t+\tau)\, dt$

$$\varphi_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t)\, x(t+\tau)\, dt$$

- Διαφασματική Πυκνότητα Ισχύος:

$$\Phi_{xy}(f) = F\{\varphi_{xy}(\tau)\} \Rightarrow \varphi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xy}(f)\, e^{j2\pi f\tau}\, df$$

- Φασματική Πυκν. Ισχύος:

$$\Phi_x(f) = F\{\varphi_x(\tau)\} \Rightarrow \varphi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(f)\, e^{j2\pi f\tau}\, df \quad (1)$$

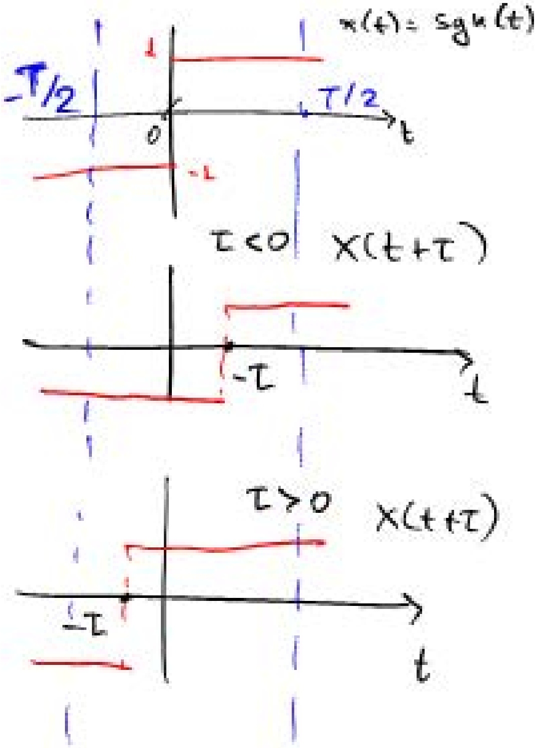
$\Rightarrow x(t,T) = x(t) \cdot \mathrm{rec}\left(\frac{t}{T}\right)$

$$\downarrow F$$

$X(f,T) \rightarrow |X(f,T)|^2 \Rightarrow \Phi_x(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} |X(f,T)|^2$

Φασμ. Πυκ. Ισχύος

(2) ή $\Phi_x(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} |X(f,T)|^2$



$$\varphi_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^*(t)\, x(t+\tau)\, dt$$

$\underline{\tau<0}$

$$\varphi_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[\int_{-T/2}^{0} dt + \int_{0}^{-\tau} (-1)\,dt + \int_{-\tau}^{T/2} dt\right] =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[\frac{T}{2} + \tau + \frac{T}{2} + \tau\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[T + 2\tau\right] =$$

$$= 1 + \lim_{T\to\infty} \frac{2\tau}{T} \xrightarrow{} 0 \;\; = 1$$

$\underline{\tau>0}$

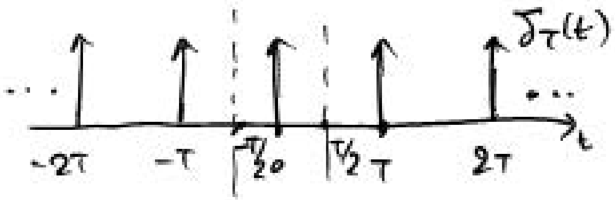
$$\varphi_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[\int_{-T/2}^{-\tau} dt + \int_{-\tau}^{0} (-1)\,dt + \int_{0}^{T/2} dt\right] =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[-\tau + \frac{T}{2} - \tau + \frac{T}{2}\right] = 1$$

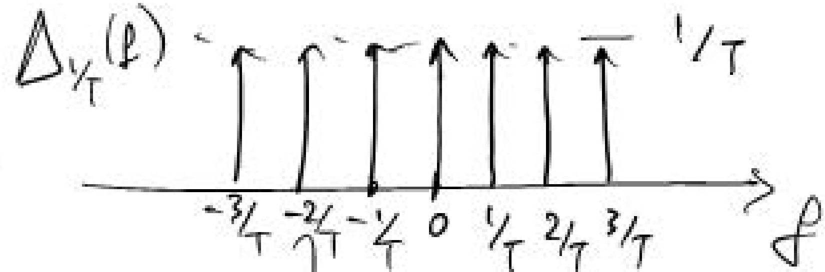
$$x(t) = \mathrm{sgn}(t) \Rightarrow \varphi_x(\tau) = 1 \;\; \forall \tau \Rightarrow \Phi_x(f) = 1\,\delta(f)$$

$$\hookrightarrow X(f, T) = F\left\{x(t)\cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\right\} \to |X(f,T)|^2 \to \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}|X(f,T)|^2$$

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$



$$\xrightarrow{\mathcal{F}}$$



$$\delta_T(t) = \sum_k X_k \, e^{j\frac{2\pi}{T}kt} = \frac{1}{T}\sum_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$$

$$X_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-j\frac{2\pi}{T}kt}\, dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{T}kt}\, dt = \frac{1}{T}x(0) = \frac{1}{T}$$

$$e^{j\frac{2\pi}{T}kt} = e^{j2\pi f_k t} \xrightarrow{F} \delta(f-f_k)$$

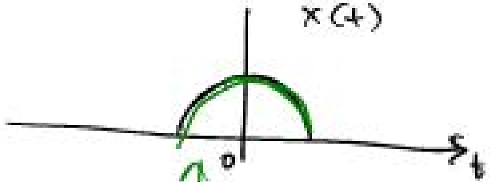
$$f_k = \frac{k}{T}$$

$$\Rightarrow \Delta(f) = F\{\delta_T(t)\}$$

$$\Rightarrow \Delta_{1/T}(f) = \sum_k \frac{1}{T}\,\delta(f-f_k) = \sum_k \frac{1}{T}\,\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$$

$$x(t) = x(t+T_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k\, e^{j\frac{2\pi}{T_0}kt}$$

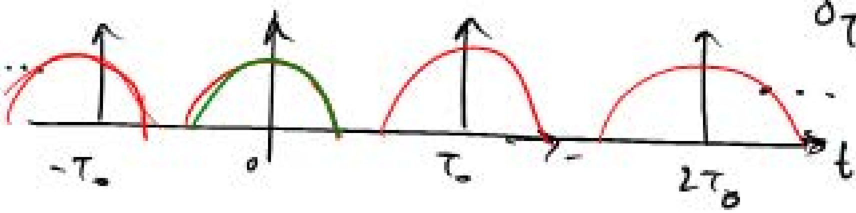
$$x(t) = x(t,T_0) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-nT_0, T_0)$$



$x(t, T_0)$

$x(t) * \delta(t) = x(t)$

$x(t) * \delta(t - T_0) = x(t - T_0)$



$$x(t) * [\delta(t) + \delta(t - T_0)] =$$

$$= x(t) * \delta(t) + x(t) * \delta(t - T_0) =$$

$$= x(t) + x(t - T_0)$$

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$$

$$x(t) * \delta_{T_0}(t) = x(t, T_0) * \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)}_{\delta_{T_0}(t)} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT_0)$$

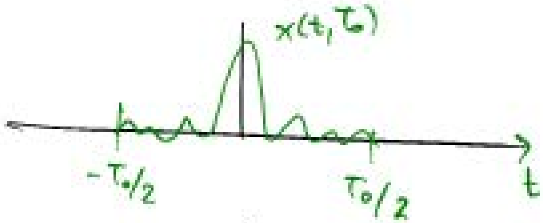
Περιοδικό

$$x(t) = x(t + T_0) \Rightarrow$$

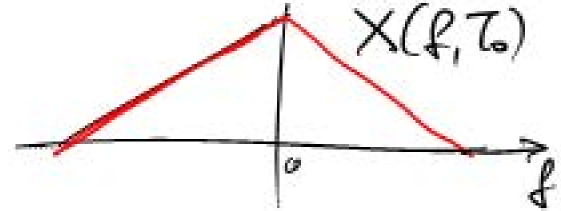
$$x(t) = x(t, T_0) * \delta_{T_0}(t)$$

$$F\{x(t)\} = F\{x(t, T_0)\} \cdot F\{\delta_{T_0}(t)\} = X(f, T_0) \cdot \frac{1}{T_0} \Delta_{1/T_0}(f) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F\{x(t)\} = X(f, T_0) \cdot \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right) =$$

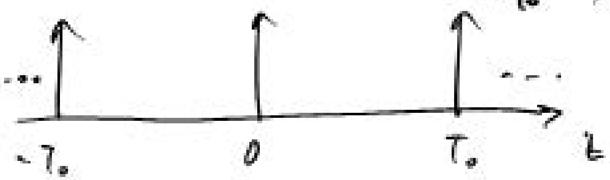


$\xrightarrow{F}$

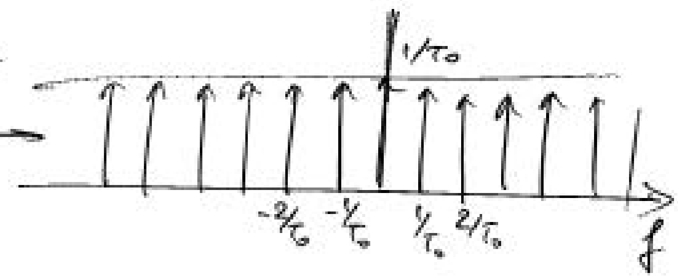


$*$

$\delta_{T_0}(t)$



$\xrightarrow{F}$



swijft

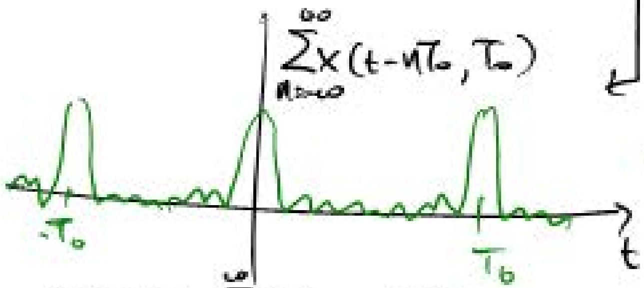
=

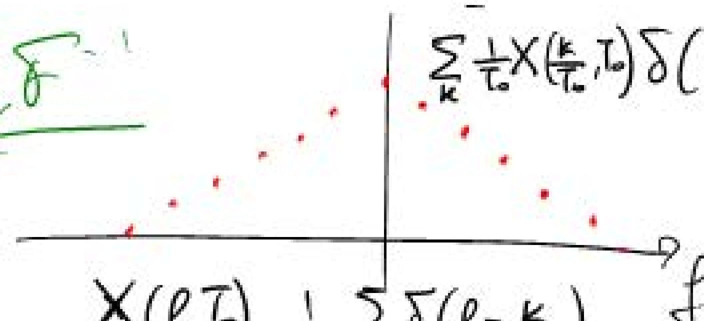
=

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-nT_0,T_0)$

$\sum_k \frac{1}{T_0} X\left(\frac{k}{T_0},T_0\right)\delta\left(f-\frac{k}{T_0}\right)$

F^{-1}





$$x(t,T_0) * \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-nT_0,T_0)$$

$$X(f,T_0)\cdot\frac{1}{T_0}\sum_k\delta\left(f-\frac{k}{T_0}\right) = \sum_k \underbrace{\frac{1}{T_0}X\left(\frac{k}{T_0},T_0\right)}\underbrace{\delta\left(f-\frac{k}{T_0}\right)}$$

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-j\frac{2\pi}{T}kt}\,dt$$

$$x(t)=x(t+T_0)=\sum_k X_k e^{j\frac{2\pi k}{T_0}t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F\{x(t)\}=\sum_k X_k\,\underbrace{\delta\left(f-\frac{k}{T_0}\right)}$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{T_0}X\left(\frac{k}{T_0},T_0\right)$$

Τέλος Ενότητας

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα αδειοδότησης

- Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγο Έργο 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».

[1] http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/

- Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:
  - που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
  - που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
  - που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

- Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

.

Σημείωμα Αναφοράς