ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Διάλεξη 14η: Τυχαίες Διαδικασίες

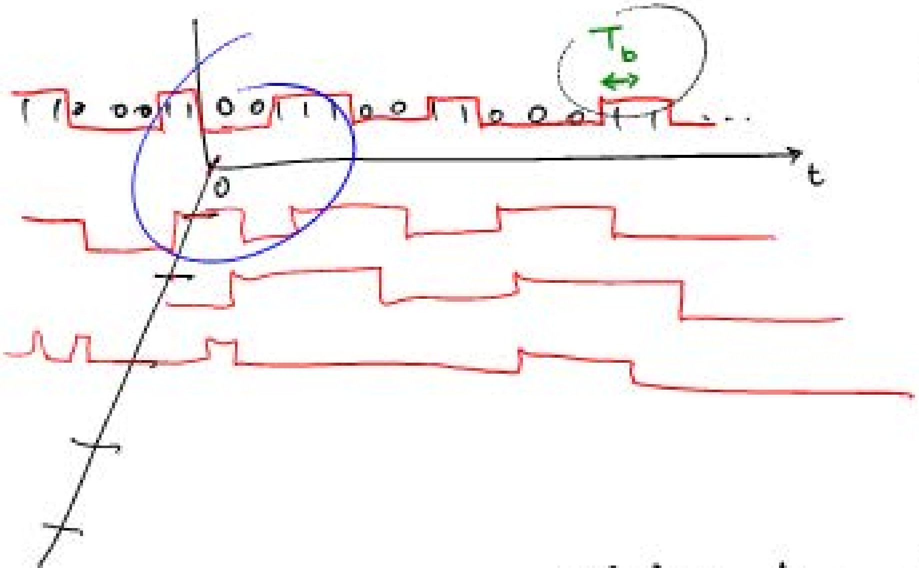
Ιωάννης Στυλιανού
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ 215

Διάλεξη 14

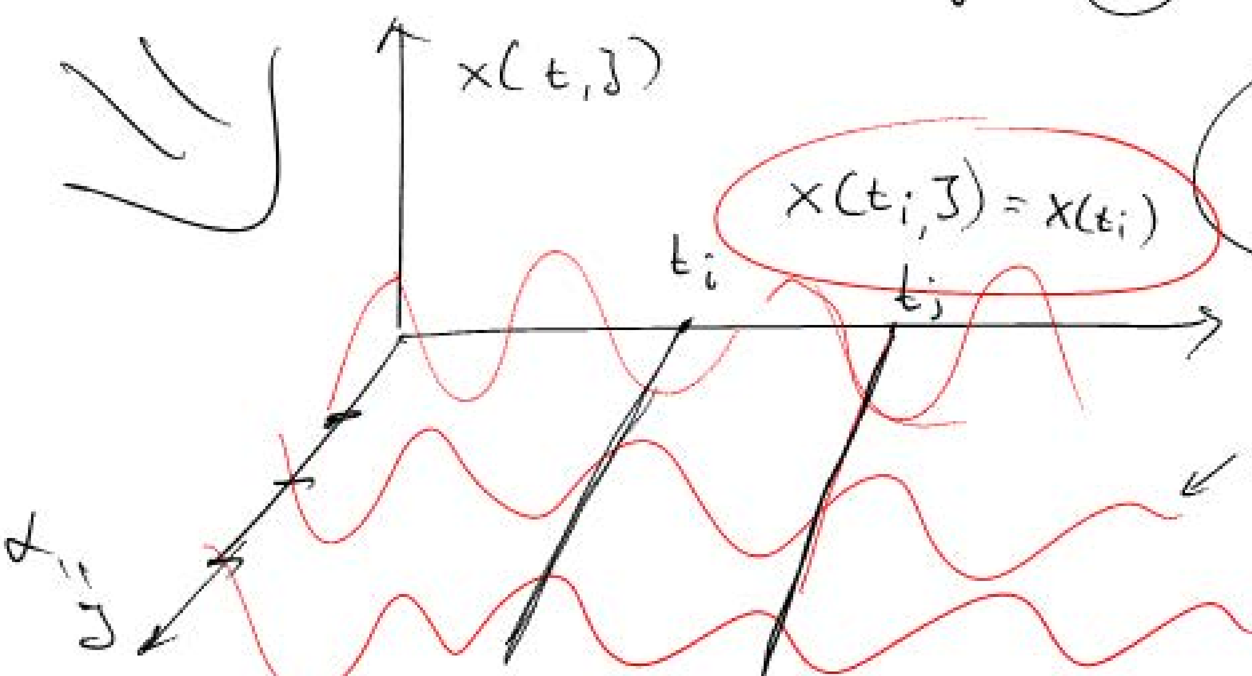
τυχ. διαδικασίες

Στοχ. Διαδικασία



$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \alpha)$$
$$= A\cos(2\pi f_0 t + \alpha)$$

$-\pi \le \alpha < \pi$



$\{x(t,\alpha)\}$

Τυχ. διαδ.

$x_i(t) = x(t,\zeta_i)$

Χρόνος χώρος

$$\bar{x} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_k(t)\,dt$$

χρον. μέσος όρος

$$\varphi_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_i^*(t)\, x_i(t+\tau)\,dt$$

αυτοσ. στο χρόνο

Στατιστικός χώρος

Συνάρτηση κατανομής Τυχ. Μετ.

$$F_{X(t_i)}(x) = \mathrm{Prob}(X(t_i) \le x)$$

Συνάρτηση πυκνότητας π.θ.

pdf $$P_{X(t_i)}(x) = \frac{dF_{X(t_i)}(x)}{dx}$$

Από κοινού συν. κατ. Τυχ. μετ.

$$F_{X(t_i)X(t_j)}(x_1,x_2) = \mathrm{Prob}(X(t_i)\le x_1, X(t_j)\le x_2)$$

Από κοινού συν. πυκν. π.θ.

joint pdf

$$P_{X(t_i)X(t_j)}(x_1,x_2) = \frac{\partial^2 F_{X(t_i)X(t_j)}(x_1,x_2)}{\partial x_1\, \partial x_2}$$

Στατιστική μέση τιμή:

$$E\{X(t_i)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, P_{X(t_i)}(x)\,dx$$

Στατιστική αυτοσ.

$$R_X(t_i,t_j) = E\{X(t_i)X(t_j)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2\, P_{X(t_i)X(t_j)}(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2$$

$E\{x(t)\} = \mu_x \qquad E\{x^2(t)\}$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_x)^2\, p_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, p_X(x)\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} \mu_x^2\, p_X(x)\,dx -$$

$$-2\int_{-\infty}^{\infty} \mu_x\, x\, p_X(x)\,dx = E\{x^2(t)\} + \mu_x^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\,dx}_{1} -$$

$$-2\mu_x \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x\, p_X(x)\,dx}_{\mu_x} = E\{x^2(t)\} + \mu_x^2 - 2\mu_x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = E\{x^2(t)\} - \mu_x^2 \Rightarrow \boxed{E\{x^2(t)\} = \sigma^2 + \mu_x^2}$$

- Αν $E\{x(t_i)\} = C \quad \forall t$ Στάσιμη 1ης τάξεως

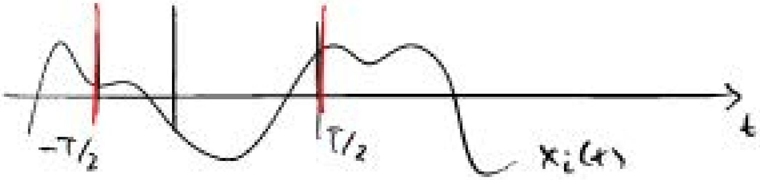
- Αν $E\{x(t_i), x(t_j)\} = f(|t_i - t_j|)$ Στάσιμη 2ης τάξεως

$$R_x(t_i, t_j) = f(\tau) \quad \text{όπου} \quad \tau = |t_i - t_j|$$

- Αν $\bar{X} = E\{x(t_i)\}$, $\varphi_x(\tau) = [R_x(t_i, t_j) = f(\tau)]$

$\boxed{\text{Εργοδική}}$

Στάσιμη 2ης τάξεως = Στάσιμη με την ευρεία έννοια



$$x_i(t,T) = x_i(t)\cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$X_i(f,T) = \int_{-\infty}^{\infty} x_i(t,T)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

$$\Phi_i(f,T) = \frac{1}{T}\left| X_i(f,T)\right|^2$$

periodogram

$$P_{x_i}(T) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_i(f,T)\, df$$

$$\Phi_x(f,T) = E\left\{\Phi_i(f,T)\right\}$$

?

$$\Phi_x(f) = \lim_{T\to\infty}\left\{\Phi_x(f,T)\right\} = \lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{T}\left|X_i(f,T)\right|^2\right\}$$

<u>Wiener-Khinchin:</u>

$$\Phi_x(f) = F\left\{R_x(\tau)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau$$

$$\Phi_{x_i}(f,T) = \frac{1}{T}\,|X_i(f,T)|^2 = \frac{1}{T}\,X_i^*(f,T)\,X_i(f,T)$$

$$X_i(f,T) = \int_{-\infty}^{\infty} x_i(t)\cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi f t}\,dt$$

$$\Phi_{x_i}(f,T) = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x_i(t')\,\mathrm{rect}\left(\frac{t'}{T}\right) e^{+j2\pi f t'}\,dt' \int_{-\infty}^{\infty} x_i(t)\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi f t}\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_i(t')\,x_i(t)\cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t'}{T}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi f(t-t')}\,dt\,dt'$$

$$\tau = t - t'$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_i(t)\;x_i(t-\tau)\;\mathrm{rec}\left(\frac{t-\tau}{T}\right)\mathrm{rec}\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi f\tau}\,dt\,d\tau$$

$$\Phi_x(f,T) = E\{\Phi_{x_i}(f,T)\} = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{E\{x_i(t)\,x(t-\tau)\}}_{R_x(\tau)}\;\mathrm{rect}\left(\frac{t-\tau}{T}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi f\tau}\,dt\,d\tau$$

$$= \cancel{\frac{1}{T}}\int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)\left[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t-\tau}{T}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) dt}_{\cancel{T}\cdot\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)}\right]\cdot e^{-j2\pi f\tau}\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)\left[1-\frac{|\tau|}{T}\right]\cdot e^{-j2\pi f\tau}\,d\tau$$

$$\Phi_x(f,T) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)\cdot\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)e^{-j2\pi f\tau}\,d\tau$$

$$\Phi_x(f) = \lim_{T\to\infty}\Phi_x(f,T) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)\,e^{-j2\pi f\tau}\,d\tau$$

$x(t) = A\sin(\omega t + \alpha)$ $\qquad p_A(\alpha) = \frac{1}{2\pi}$ $\qquad -\pi \le \alpha < \pi$

$\int_{-\pi}^{\pi} p_A(\alpha)\, d\alpha = 1$

$E(x) = \int x\, p_x(x)\, dx$

$E\{g(x)\} = \int g(x)\, p_x(x)\, dx$

$t_i : x(t_i) = A\sin(\omega t_i + \alpha)$

τυχ. μεταβλητή

Στατιστική μέση τιμή:

$$\mu_{x(t_i)} = E\{x(t_i)\} = \int_{-\infty}^{\infty} A\sin(\omega t_i + \alpha)\, p_A(\alpha)\, d\alpha =$$

$$= \frac{A}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(\omega t_i + \alpha)\, d\alpha = 0$$

Χρ. μέση τιμή:

$$\bar{x} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A\sin(\omega t + \alpha_i)\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{A}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \sin(\omega t + \alpha_i)\, dt$$

$$= 0$$

$$E\{A\sin(\omega t_i+\alpha)\}=0 \quad \forall t_i \Rightarrow E\{A\sin(\omega t+\alpha)\}=0$$

Στατ. Αυτοσυσχ.

$$R_x(t_1,t_2)=E\{x(t_1)\,x(t_2)\}=A^2E\left[\sin(\omega t_1+\alpha)\sin(\omega t_2+\alpha)\right]$$

$$\sin(a)\sin\beta=\frac{1}{2}\cos(a-\beta)-\frac{1}{2}\cos(a+\beta) \Rightarrow$$

$$R_x(t_1,t_2)=\frac{A^2}{2}E\left[\cos(\omega\underbrace{(t_1-t_2)}_{\tau})\right]-\frac{A^2}{2}E\left[\cos(\omega\overbrace{(t_1+t_2)}^{t'}+2\alpha)\right] \rightarrow 0$$

$$=\frac{A^2}{2}\cos(\omega\tau) \Rightarrow R_x(t_1,t_2)=\frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau)$$

Στάσιμη 2ης τάξης

$$\Phi_x(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\,x(t+\tau)\,dt=\frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau)$$

$$\Phi_x(\tau)=R_x(\tau)$$

ΕΡΓΟΔΙΚΗ

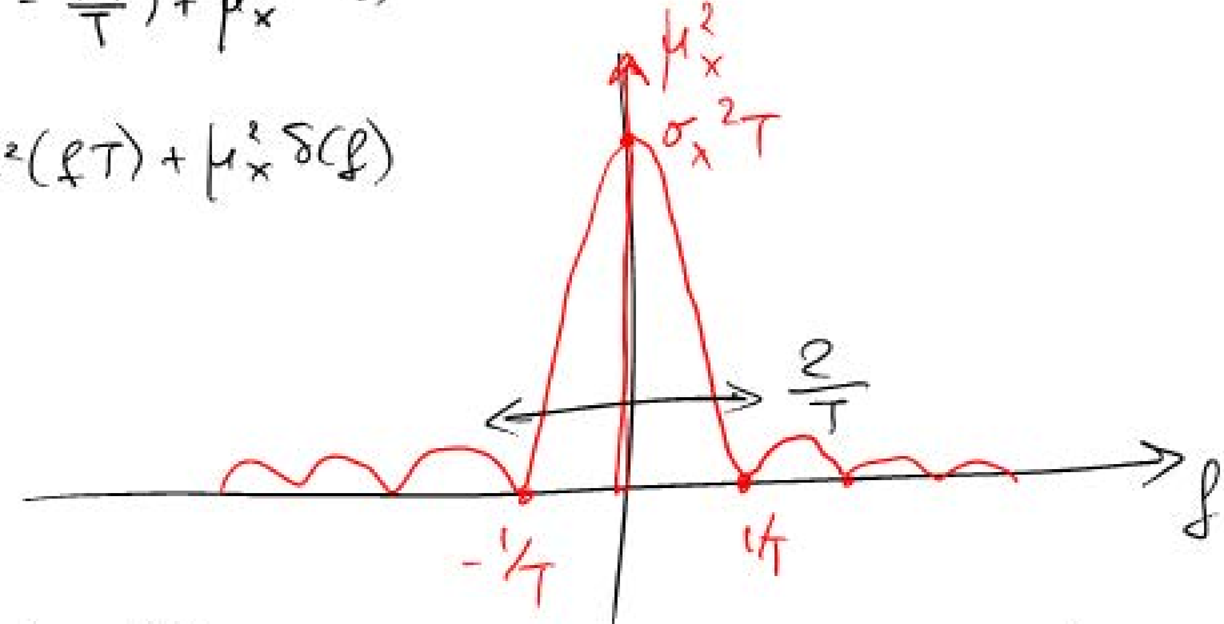
$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \alpha) \rightarrow R_x(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0 \tau)$$

$\omega_0 = 2\pi f_0$

$$\Phi_x(f) = \frac{A^2}{4}\delta(f - f_0) + \frac{A^2}{4}\delta(f + f_0)$$

$$R_x(\tau) = \sigma_x^2\left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) + \mu_x^2 \Rightarrow$$

$$\Phi_x(f) = \sigma_x^2 T \,\mathrm{sinc}^2(fT) + \mu_x^2 \delta(f)$$



T

Υψηλός ρυθμός μετάδοσης : μικρό T → μεγ. εύρος ζώνης

Χαμ. ρυθμός μετ. : μεγ T → μικ. εύρος ζ..

Τέλος Ενότητας

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα αδειοδότησης

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Ιωάννης Στυλιανού. «Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς. Διάλεξη 14η: Τυχαίες Διαδικασίες». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο/Ρέθυμνο 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://www.csd.uoc.gr/~hy215