ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Διάλεξη 17η: Μετασχηματισμός Laplace

Ιδιότητες

Ιωάννης Στυλιανού
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ 215

Μετ. Laplace

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$x(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)\, e^{st}\, ds$$

$$s = \sigma + j2\pi f$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\, \epsilon(t)\} = \frac{1}{s-a} \quad , \quad \text{RoC: } \sigma > a$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = h(t) * x(t)$$

Γ.Χ.Α.

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \sum_{k=0}^{r} \frac{A_k}{s-s_k} \leftarrow \text{πόλοι} \Rightarrow h(t) = \sum_{k=0}^{r} A_k \cdot e^{s_k t}\epsilon(t)$$

$$e^{at}\epsilon(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s-a}$$

$$s_k = \sigma_k + j2\pi f_k$$

$$\Rightarrow h(t) = \sum_{k=0}^{r} A_k \cdot e^{\sigma_k t} \cdot e^{j2\pi f_k t}\epsilon(t) \Rightarrow h(t) = \sum_k h_k(t)$$

Ευσταθές!

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt < \infty$$

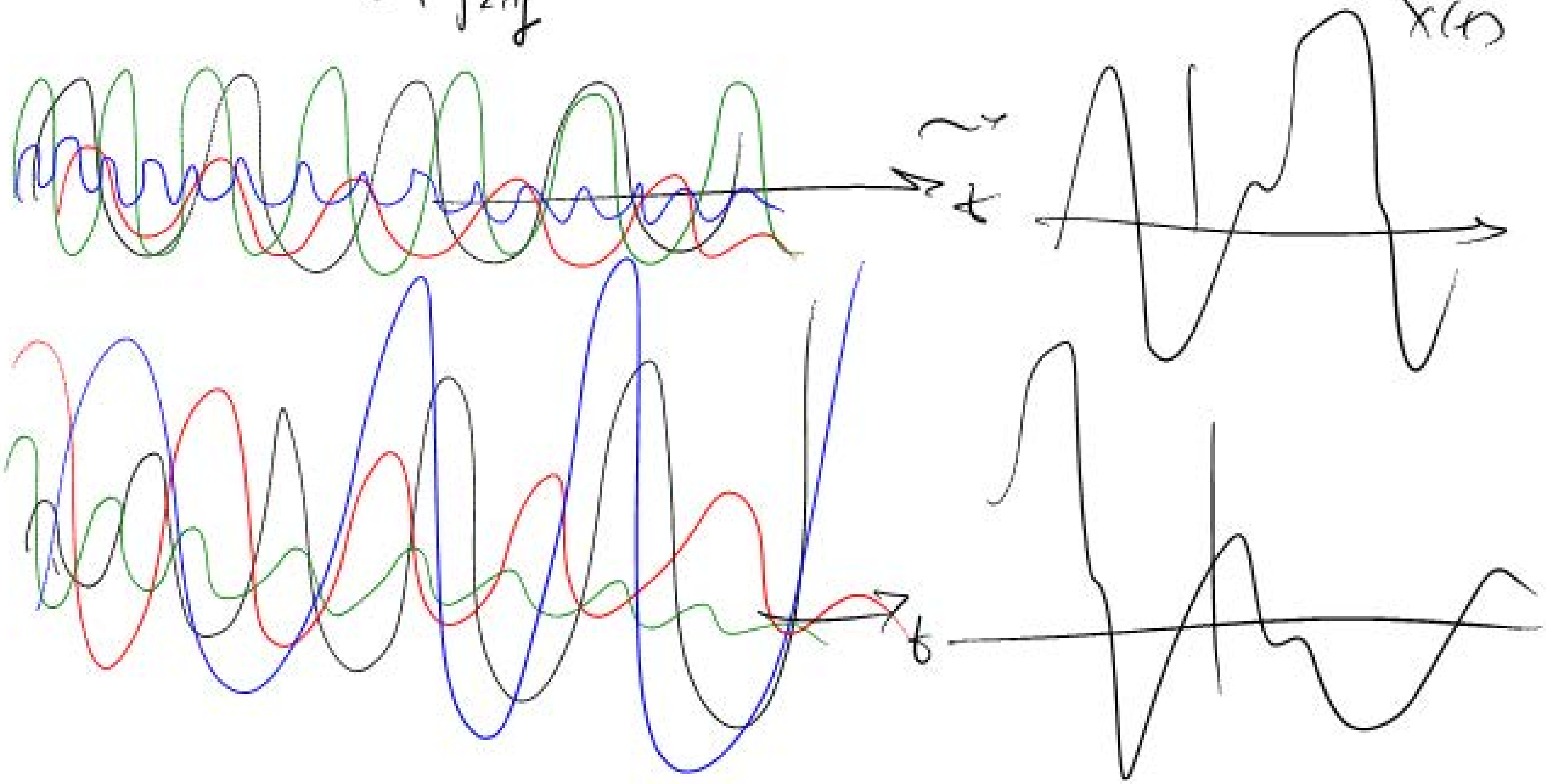
$$h_k(t) = A_k \cdot \underbrace{e^{\sigma_k t}} \cdot e^{j2\pi f_k t}\epsilon(t)$$

① $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df \rightsquigarrow x(t) = \lim_{\Delta f \to \infty} \sum_{k} X(k\Delta f)\, e^{j2\pi k \Delta f t}$.

② $x(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)\, e^{st}\, ds \rightsquigarrow x(t) = \lim_{\Delta f \to \infty} \sum_{k} X(k\Delta f)\, e^{\sigma t} \cdot e^{j2\pi k \Delta f t}$

$s \downarrow \sigma + j2\pi f$

① ②



$x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$

1. $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \alpha X_1(s) + \beta X_2(s) \rightarrow$

$\quad R_1 \qquad R_2 \qquad R = R_1 \cap R_2$

2) $x(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right) \quad R: a \cdot R_x$

<u>Δίπλευρος Μετ. Laplace:</u>

$$x(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s) e^{st} \, ds$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} \, dt$$

<u>Μονόπλευρος</u> Μετ. Laplace.

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} \, dt$$

αιτιατό σήμα

$x(t) = 0 \quad t < 0$

• $\delta(t)$ $\quad \mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t) e^{-st}\, dt = 1 \quad \forall s$

• $\epsilon(t)$: $\quad \mathcal{L}\{\epsilon(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} \epsilon(t) e^{-st}\, dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\, dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_{0^-}^{\infty} =$

$$= -\frac{1}{s}\left(\lim_{t\to\infty} e^{-st} - 1\right) = -\frac{1}{s}\left(\lim_{t\to\infty} e^{-\sigma t} \cdot e^{-j2\pi f t} - 1\right)$$

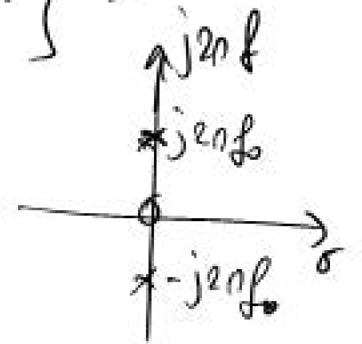
$$= \frac{1}{s}, \quad \sigma > 0$$

• $e^{j2\pi f_0 t}\epsilon(t)$ $\quad \mathcal{L}\{e^{j2\pi f_0 t}\epsilon(t)\} = \frac{1}{s - j2\pi f_0}, \quad \sigma > 0$

$$e^{at}\epsilon(t) \to \frac{1}{s-a}, \quad \sigma > a$$

• $\cos 2\pi f_0 t\, \epsilon(t)$, $\quad \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2} e^{j2\pi f_0 t}\epsilon(t) + \frac{1}{2} e^{-j2\pi f_0 t}\epsilon(t)\right\} =$

$$= \frac{s}{s^2 + 4\pi^2 f_0^2}$$



$$\cos at\, \epsilon(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s}{s^2 + a^2} = \begin{cases} s = 0 \\ s = \pm ja \end{cases}$$

1) Γραμμικότητα

$$\alpha x_1(t)+\beta x_2(t) \to \alpha X_1(s)+\beta X_2(s)$$

$$R_1 \qquad R_2 \to R_1 \cap R_2 \neq \emptyset$$

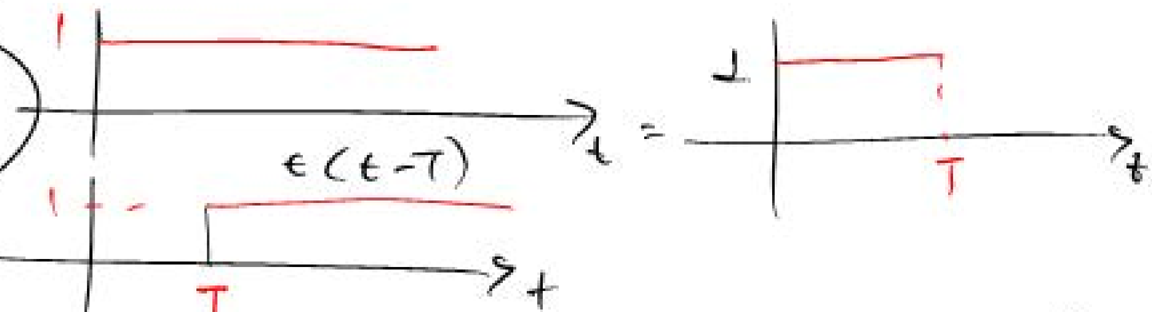
2) $x(at) \rightsquigarrow \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right) \quad aR_x$

3) $x(t-t_0) \rightsquigarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)e^{-st}\,dt \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(t')e^{-st'}\cdot e^{-st_0}\,dt'$

$$t'=t-t_0 \Rightarrow t=t'+t_0$$

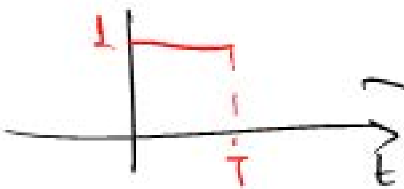
$$= e^{-st_0}\int_{-\infty}^{\infty} x(t')e^{-st'}\,dt' = e^{-st_0}X(s) \qquad R_x$$

$\epsilon(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} \qquad \sigma>0$



$$x(t)=\epsilon(t)-\epsilon(t-T) \Rightarrow \mathcal{L}\{x(t)\}=\mathcal{L}\{\epsilon(t)\}-\mathcal{L}\{\epsilon(t-T)\}=$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-sT}=\frac{1}{s}\left(1-e^{-sT}\right)$$



$$\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s}\left(1-e^{-sT}\right)$$

$$x(t) = x_0(t) + x_0(t-T_0) + x(t-2T_0) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x_0(t-kT_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{x(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}\{x_0(t-kT_0)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{s}\left(1-e^{-sT}\right)e^{-ksT_0} =$$

$$= \frac{1}{s}\left(1-e^{-sT}\right)\sum_{k=0}^{\infty} e^{-ksT_0} = \underbrace{\frac{1}{s}\left(1-e^{-sT}\right)}_{X_0(t)} \frac{1}{1-e^{-sT_0}} =$$

$\sigma > 0$

$$= \frac{1}{s}\,\frac{1-e^{-sT}}{1-e^{-sT_0}}$$

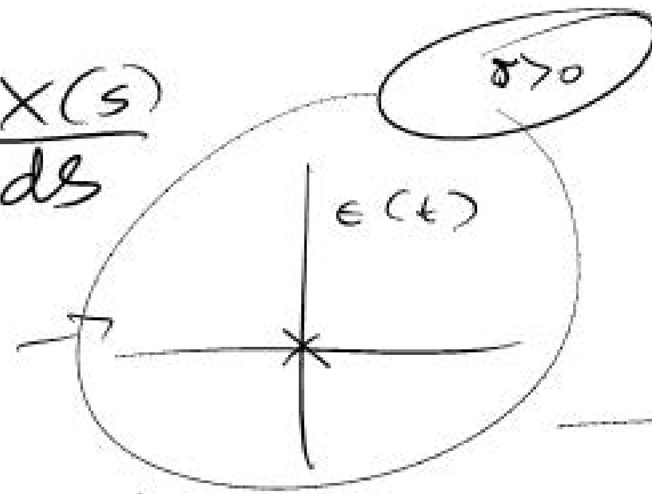
$x(t)=0 \quad t>0$

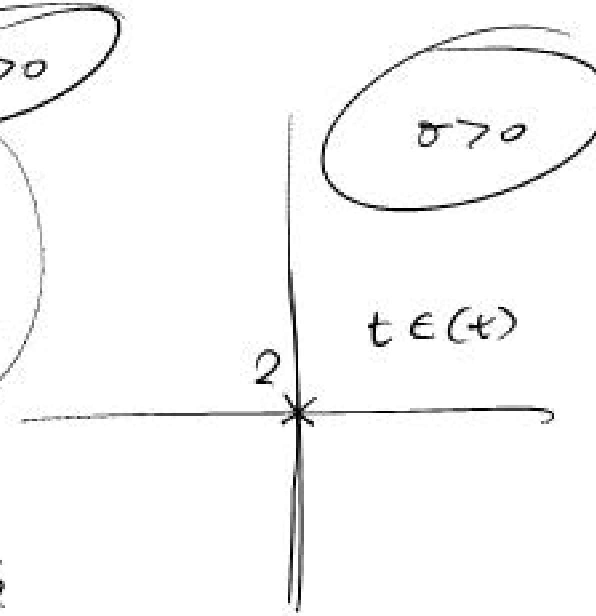
$x(t-t_0)=0 \quad (t-t_0>0) \Rightarrow t>t_0 \rightarrow \boxed{x(t-t_0)\,\epsilon(t-t_0)}$

$\cos(at)\,\epsilon(t)$

$\cos(a(t-t_0))\,\epsilon(t) \neq \cos(a(t-t_0))\,\epsilon(t-t_0)$

$-\quad t\,x(t) \rightsquigarrow -\dfrac{dX(s)}{ds}$





$\epsilon(t) \overset{\mathcal{L}}{\rightsquigarrow} \dfrac{1}{s}$

$t\,\epsilon(t) \overset{\mathcal{L}}{\rightsquigarrow} -\dfrac{d}{ds}\dfrac{1}{s} = \dfrac{1}{s^2}$

- $\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = \int_{0^-}^{\infty}\frac{dx(t)}{dt}e^{-st}dt = x(t)e^{-st}\Big|_{0^-}^{\infty} - (-s)\underbrace{\int_{0^-}^{\infty}x(t)e^{-st}dt}_{X(s)} =$

$$= \cancel{\lim_{t\to\infty} x(t)e^{-st}} - x(0^-) + sX(s) \Rightarrow$$

Αν $t \geq t_0$, $M>0$, $\boxed{\sigma > a}$ $|x(t)| \leq M\cdot e^{at}$

$$\Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} sX(s) - x(0^-)$$

1η παράγωγο της x(t) και μετά όπου $t\to 0^-$

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xrightarrow{\mathcal{L}} s^n X(s) - s^{n-1}x(0^-) - s^{n-2}x^{(1)}(0^-) \dots x^{(n-1)}(0^-)$$

$$R \supset R_x$$

- Μιγ. Freq Shifting:

$$x(t)e^{s_0 t} \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s-s_0) \qquad s > s_0$$

- $x_1(t) * x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s)\, X_2(s) \qquad R_1 \cap R_2$

- $x_1(t) \cdot x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{j2\pi}\left[X_1(s) * X_2(s)\right]$

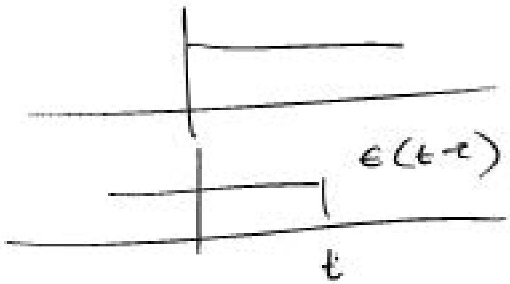
- $y(t) = \int_0^t x(\tau)\, d\tau \Rightarrow \frac{dy(t)}{dt} = x(t) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} = \mathcal{L}\{x(t)\} \Rightarrow sY(s) - y(0^-) = X(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{X(s)}{s} + \frac{1}{s} y(0^-)$$

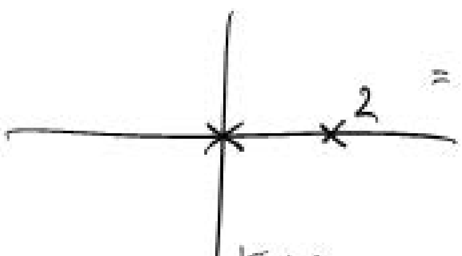
$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-4)^2}\right\} = x(t) \qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = \epsilon(t) \qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-4)^2}\right\} = te^{4t}\epsilon(t)$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau e^{4\tau}\epsilon(\tau)\,\epsilon(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t \tau e^{4\tau}\,d\tau = \left(\frac{1}{4}e^{4t}\left(t-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{16}\right)\epsilon(t)$$



$$A_j = \frac{1}{j!}\left\{\frac{d^j}{ds^j}\left[(s-s_k)^p\frac{N(s)}{D(s)}\right]\right\}_{s=s_k}$$

$$X(s) = \frac{1}{s(s-4)^2} = \frac{A}{s} + \frac{A_0}{(s-4)^2} + \frac{A_1}{s-4} =$$



$$= \frac{1}{16}\frac{1}{s} + \frac{1}{4(s-4)^2} - \frac{1}{16(s-4)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{16}\epsilon(t) + \frac{1}{4}te^{4t}\epsilon(t) - \frac{1}{16}e^{4t}\epsilon(t)$$

$$A = \frac{1}{0!}\left[\frac{d^0}{ds^0}\, s\cdot\frac{1}{s(s-4)^2}\right]_{s=0} = \frac{1}{16}$$

$$A_1 = \frac{1}{1!}\left[\frac{d}{ds}(s-4)^2\frac{1}{s(s-4)^2}\right]_{s=4} = -\frac{1}{s^2}\Big|_{s=4} = -\frac{1}{16}$$

$$A_0 = \frac{1}{0!}\left[\frac{d^0}{ds^0}(s-4)^2\frac{1}{s(s-4)^2}\right]_{s=4} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{t^{n-1}e^{-at}}{(n-1)!} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{(s+a)^n}$$

$$x(t) = t\cdot e^{-at}\epsilon(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{(s+a)^2} \quad \checkmark$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = e^{-at}\epsilon(t) - a\underbrace{t e^{-at}\epsilon(t)} = e^{-at}\epsilon(t) - a\, x(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\}}_{sX(s) - \cancel{x(0^-)}^{\,0}} = \frac{1}{s+a} - aX(s) \Rightarrow sX(s) = \frac{1}{s+a} - aX(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (s+a)\,X(s) = \frac{1}{s+a} \Rightarrow \boxed{X(s) = \frac{1}{(s+a)^2}}$$

$$\boxed{h(t) = e^{-at}\epsilon(t)}$$

$$x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t)$$

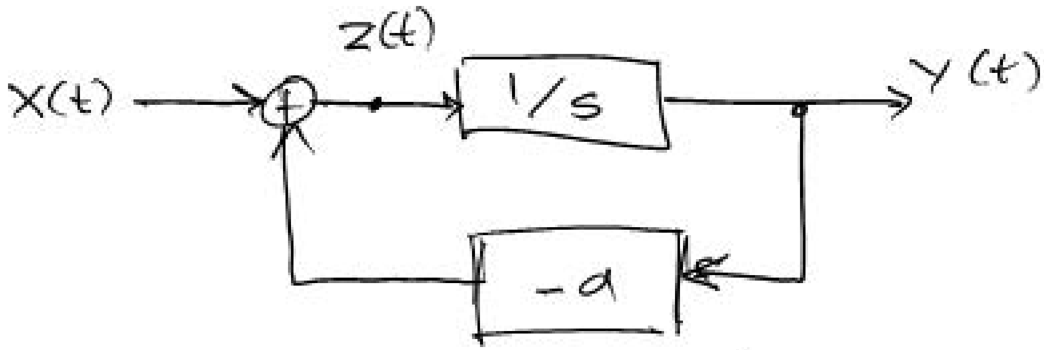
$$\boxed{\frac{dy(t)}{dt} = x(t) - a\,y(t)} \overset{\mathcal{L}}{\rightsquigarrow} sY(s) - y(0^-) = X(s) - aY(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (s+a)\,Y(s) = X(s) \Rightarrow Y(s) = \frac{X(s)}{s+a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{Y(s)}{X(s)} = \overbrace{\frac{1}{s+a}}^{H(s)} \Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \Rightarrow h(t) * x(t) = y(t)$$

$$H(s) = \frac{1}{s+a} \Rightarrow \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s+a} \Rightarrow sY(s) + aY(s) = X(s) \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dy(t)}{dt} + a\,y(t) = x(t)}$$



$$\left.\begin{array}{l} z(t) = x(t) - a\,y(t) \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} Z(s) = X(s) - aY(s) \\ Z(s) \cdot \frac{1}{s} = Y(s) \Rightarrow Z(s) = sY(s) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow sY(s) = X(s) - aY(s) \Rightarrow (s+a)\,Y(s) = X(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{Y(s) = \frac{X(s)}{s+a}}$$

Τέλος Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα αδειοδότησης

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Ιωάννης Στυλιανού. «Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς. Διάλεξη 17η: Μετασχηματισμός Laplace - Ιδιότητες». Έκδοση: 1.0. Ηράκλειο/Ρέθυμνο 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://www.csd.uoc.gr/~hy215