ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Ενότητα: Ημιτονοειδή Σήματα

Ιωάννης Στυλιανού

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗ ΣΗΜΑΤΑ

1 Βασικά Σήματα

Ας αρχίσουμε την μελέτη των σημάτων εξετάζοντας κάποια χαρακτηριστικά σήματα, όπως τα ημιτονοειδή $y = \cos(x), y = \sin(x)$. Αυτά τα σήματα μας ενδιαφέρουν ιδιαίτερα, επειδή, όπως θα δούμε αργότερα, πολλά απο τα σήματα που μπορούμε να παρατηρήσουμε στην φύση, μπορούν να εκφραστούν ως αθροίσματα ημιτονοειδών σημάτων. Ενα ημιτονοειδές εκφράζεται απο τον παρακάτω τύπο:

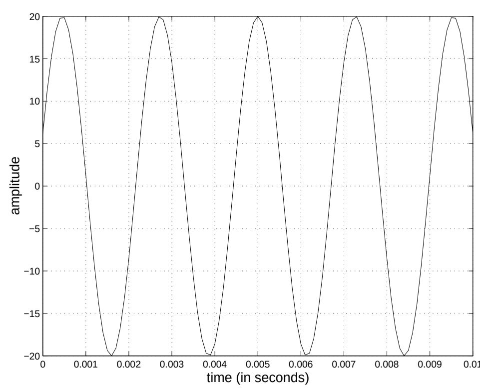
$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

όπου

A: πλάτος του ημιτονοειδούς.

ω_0: κυκλική συχνότητα, $\omega_0 = 2\pi f_0$ (σε rad/sec), με f_0 (σε Hz) να είναι η συχνότητα.

ϕ: η φάση.



Σχήμα 1: Ενα απλό ημιτονοειδές

Ενα παράδειγμα ενός ημιτονοειδούς σήματος μπορούμε να δούμε στο σχήμα 1. Ο τύπος του είναι:

$$x(t) = 20\cos(2\pi 440t - 0.4\pi).$$

Αυτό το σήμα λαμβάνει τιμές μεταξύ $[-20, +20]$, και επαναλαμβάνεται κάθε $1/440$ (=0.00227) του δευτερολέπτου. Συγκεκριμένα, αυτό το σήμα είναι η νότα La της πέμπτης οκτάβας. Σημειώστε ότι 440 Hz είναι η συχνότητα με βάση την οποία κουρδίζονται τα μουσικά όργανα. Αρα

1/440 είναι η περίοδος του σήματος. Στον παρακάτω πίνακα δίδονται μερικές τριγωνομετρικές ιδιότητες χρήσιμες στην επεξεργασία συναρτήσεων/σημάτων με ημιτονοειδής συναρτήσεις.

$\sin(\theta) = \cos(\theta - \pi/2)$
$\cos(\theta) = \sin(\theta + \pi/2)$
$\cos(\theta) = \cos(\theta + 2k\pi)$
$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$
$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$
$\sin(k\pi) = 0, \forall k \in \mathcal{Z}$
$\cos(2k\pi) = 1, \forall k \in \mathcal{Z}$
$\frac{d\sin(\theta)}{d\theta} = \cos\theta$
$\frac{d\cos(\theta)}{d\theta} = -\sin\theta$
$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$
$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$
$\sin(2\theta) = 2sin(\theta)cos(\theta)$
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$
$\cos^2(\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta))$
$\sin^2(\theta) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta))$

Πίνακας 1: Μερικές τριγωνομετρικές σχέσεις.

2 Ημιτονοειδή Σήματα

Η πιο σημαντική κατηγορία 'βασικών' σημάτων, είναι τα ημιτονοειδή. Γι'αυτό αξίζει τον κόπο να τα εξετάσουμε διεξοδικά. Ας δούμε πάλι τον γενικό τύπο των σημάτων αυτών:

$$x(t) = A\cos(\underbrace{\omega_0 t + \phi}_{radians}) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

όπου A: πλάτος του ημιτονοειδούς. ω_0: κυκλική συχνότητα, $\omega_0 = 2\pi f_0$, με f_0 να είναι η συχνότητα. ϕ: η φάση. Για αποφυγή παρεξηγήσεων, χρησιμοποιούμε cos(.) αντί για sin(.), άσχετα αν τα σήματα αυτά τα λέμε ημιτονοειδή. Είδαμε εξάλλου τη σχέση που έχει το ημίτονο με το συνημίτονο. Ας μελετήσουμε ένα συγκεκριμένο ημιτονοειδές:

$$x(t) = 20\cos(2\pi 10t - 0.4\pi),$$

Η συχνότητα σε αυτό είναι $f_0 = 10Hz$, και η περίοδος $T_0 = \frac{1}{f_0} = 0.1sec$. Η περίοδος μας δίνει το χρόνο του κάθε πότε επαναλαμβάνεται π.χ. η μέγιστη ή η ελάχιστη τιμή του σήματος. Εδώ λοιπόν θα έχουμε μέγιστο τις χρονικές στιγμές $t = ..., -0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.2, ...$

Επομένως:

$x(t + T_0) = x(t)$

$\cos(\omega_0(t + T_0) + \phi) = x(t)$

$\cos(\omega_0 t + \omega_0 T_0 + \phi) = x(t) = \cos(\omega_0 t + \phi) = \cos(\omega_0 t + 2k\pi + \phi), \forall k \in \mathcal{N}$

Παρατηρούμε ότι θα πρέπει να ισχύει

$$\omega_0 T_0 = 2k\pi \Rightarrow T_0 = k\frac{2\pi}{\omega_0}$$

Ονομάζουμε βασική περίοδο ή απλά περίοδο του σήματος την τιμή του T_0 για $k = 1$. Ετσι η περίοδος ενός ημιτονοειδούς σήματος θα δίδεται από τη σχέση:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

και επειδή

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

τότε

$$T_0 = \frac{1}{f_0}$$

Επομένως $T_0 = \dfrac{1}{f_0} = \dfrac{1}{10} = 0.1$

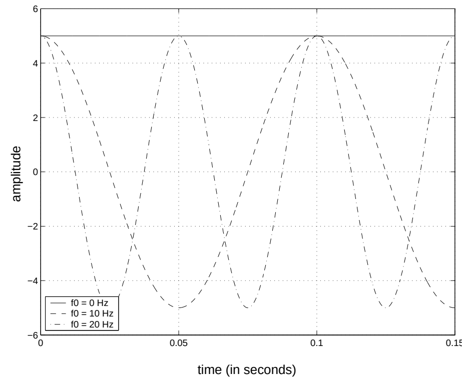
Στο σχήμα 2 βλέπουμε μερικά ημιτονοειδή για διάφορες συχνότητες f_0:

για $f_0 = 0$, το $x(t) = 5\cos(2\pi 0t) = 5$

για $f_0 = 10$, το $x(t) = 5\cos(2\pi 10t)$

για $f_0 = 20$, το $x(t) = 5\cos(2\pi 20t)$

Για $f = 0$ έχουμε το σταθερό σήμα $x(t) = 5, \forall t \in \mathcal{R}$.Το σήμα αυτό το λέμε και DC (Direct Current). Αυτή η ονομασία χρησιμοποιείται στην ηλεκτρονική από παλιά και έχει μείνει μέχρι σήμερα λόγω συνήθειας.



Σχήμα 2: Ημιτονοειδή σήματα για διάφορες συχνότητες.

3 Μετατόπιση Χρόνου - Μετατόπιση Φάσης

Η συχνότητα καθορίζει το κάθε πότε επαναλαμβάνονται τα μέγιστα και τα ελάχιστα ενός ημιτονοειδούς, ενώ η φάση καθορίζει το πού ακριβώς αυτά βρίσκονται. Αν

$\phi = 0$ τότε το πρώτο μέγιστο βρίσκεται στο $t = 0$

$\phi \neq 0$ τότε το πρώτο μέγιστο έχει *μετατοπιστεί* στο χρόνο.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα μετατοπίσεων στο χρόνο:

$$s(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{2}(3-t) & 1 \leq t \leq 3 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$g(t) \equiv s(t-2) = \begin{cases} t-2 & 0 \leq t-2 \leq 1 \\ \frac{1}{2}(3-(t-2)) & 1 \leq t-2 \leq 3 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \Rightarrow g(t) = \begin{cases} t-2 & 2 \leq t \leq 3 \\ \frac{1}{2}(5-t) & 3 \leq t \leq 5 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

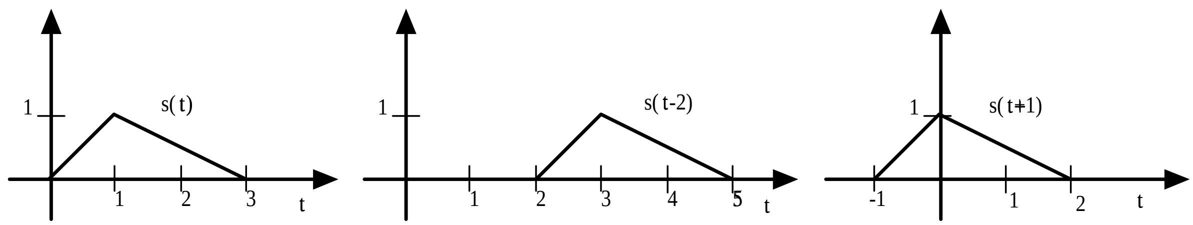
Αν ο χρόνος μετριέται σε δευτερόλεπτα, τότε το σήμα το μετατοπίσαμε 2 δευτερόλεπτα στο μέλλον, επομένως θα καθυστερήσουμε 2 δευτερολεπτα μέχρι να το δούμε. Γι' αυτό λέμε ότι έχουμε το καθυστερημένο (delayed) σήμα. Επομένως, όταν έχουμε $s(t-t_0)$ έχουμε καθυστέρηση αν $t_0 > 0$, δηλαδή έαν έχουμε μετατοπίσει προς τα δεξιά (προς το μέλλον) το σήμα.

Ας μετατοπίσουμε τώρα το σήμα προς το παρελθόν. Το μετατοπισμένο κατά 1 δευτερόλεπτο σήμα είναι:

$$h(t) \equiv s(t+1) = \begin{cases} t+1 & 0 \le t+1 \le 1 \\ \frac{1}{2}(3-(t+1)) & 1 \le t+1 \le 3 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \Rightarrow h(t) = \begin{cases} t+1 & -1 \le t \le 0 \\ \frac{1}{2}(2-t) & 0 \le t \le 2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

τώρα, έχουμε $t_0 = -1$ (αφού $s(t-(-1)) = s(t+1)$). Το σήμα συμβαίνει 1 δευτερόλεπτο πιο νωρίς, δηλαδή μετατοπίζεται προς τα αριστερά, και γιάυτό το λέμε προχωρημένο (advanced).

Οι παραπάνω μετατοπίσεις καθώς και το αρχικό σήμα φαίνονται στο Σχήμα. 3



Σχήμα 3: Ενα σήμα στην αρχική του θέση, στο μέλλον και στο παρελθόν

4 Φάση Μετατόπισης

Ας συμβολίσουμε με $x_0(t)$ το ημιτονοειδές σήμα με $\phi = 0$:

$$x_0(t) = A\cos(\omega_0 t) = A\cos(\omega_0 t + 0)$$

Εστω λοιπόν ότι βάζουμε καθυστέρηση t_1 στο $x_0(t)$ (delay t_1). Τότε:

$$x_0(t-t_1) = A\cos(\omega_0(t-t_1)) = A\cos(\omega_0 t - \omega_0 t_1) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

Θέσαμε $\phi = -\omega_0 t_1 \Rightarrow t_1 = -\frac{\phi}{\omega_0} \Rightarrow t_1 = -\frac{\phi}{2\pi f_0}$. Ομως, $T_0 = \frac{1}{f_0}$, επομένως έχουμε:

$$\phi = -2\pi f_0 t_1 = -2\pi \frac{t_1}{T_0}, \tag{1}$$

αυτή η σχέση μας δείχνει τι τιμή πρέπει να έχει το ϕ για να έχουμε καθυστέρηση t_1 (π.χ. δευτερόλεπτα).

Εδώ θα πρέπει να διευκρινήσουμε την ορολογία. Φάση λέμε την ποσότητα που υπάρχει στο όρισμα του cos(.), δηλαδή την ποσότητα: $\omega_0 t + \phi$. Φάση μετατόπισης λέμε την ποσότητα ϕ. Ενα μικρό μπέρδεμα που προκύπτει πολύ συχνά στην βιβλιογραφία είναι ότι για λόγους απλότητας η φάση μετατόπισης αναφέρεται απλά ως 'φάση'. Από εδώ και στο εξής θα αναφερόμαστε συχνά στην φάση μετατόπισης απλά ως φάση ενώ θα διαχωρίζουμε τις δύο φάσεις όταν αυτό είναι αναγκαίο.

Γενικά, εάν ένα σήμα έχει περίοδο T_0, η μετατόπιση του είναι φραγμένη:

$$|t_1| \leq \frac{T_0}{2} \tag{2}$$

Φυσικά και μπορούμε να μετακινήσουμε περισσότερο το σήμα, το αποτέλεσμα όμως που θα λάβουμε είναι το ίδιο, αφού το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο T_0. Επομένως από την Εξ. 1 και την Εξ. 2 έχουμε:

$$-\pi \leq \phi < \pi \tag{3}$$

5 Μιγαδικό Εκθετικό Σήμα

Ενώ το ημιτονοειδές σήμα είναι πολύ χρήσιμο, το να κάνεις πράξεις με αυτό φέρνει πονοκέφαλο. Ενας τρόπος να απλοποιηθούν οι πράξεις, είναι να χρησιμοποιήσουμε σήματα συγγενικά στα ημιτονοειδή, τα οποία λέγονται *μιγαδικά εκθετικά σήματα*.

5.1 Μιγαδικοί αριθμοί

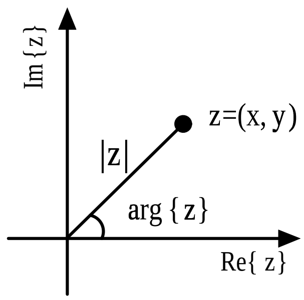
Ας θυμηθούμε λίγο τους μιγαδικούς αριθμούς. Έστω μιγαδικός $z = (x, y)$, με $x = \Re(z), y = \Im(z)$. Χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\jmath \equiv \sqrt{-1}$ [1]. Ενα μιγαδικό μπορούμε να τον δούμε ως ένα σημείο σε ένα καρτεσιανό επίπεδο, δηλαδή στην καρτεσιανή του μορφή. Το επίπεδο αυτό τότε ονομάζεται 'μιγαδικό επίπεδο'. Μπορούμε επίσης να το δούμε και ως ένα σημείο σε ένα επίπεδο με πολικές συντεταγμένες $(r, \theta) \equiv (|z|, \arg(z))$, όπου r είναι η απόσταση από το κέντρο των αξόνων και θ η γωνία ως προς τον xx' άξονα. Η παραπάνω αναπαράσταση ενός μιγαδικού αριθμού φαίνεται στο Σχήμα. 4.

Οι ακόλουθοι τύποι συνδέουν καρτεσιανές και πολικές συντεταγμένες:

$x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$, πολικές σε καρτεσιανές

$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$, καρτεσιανές σε πολικές

[1] το σύμβολο $\equiv$ σημαίνει 'ισοδύναμο', δηλαδή *ορίζει* την μεταβλητή.



Σχήμα 4: Το μιγαδικό ή Ευκλείδιο ή ακόμα και Καρτεσιανό επίπεδο

Ενας πολύ σημαντικός τύπος είναι ο τύπος του Euler:

$$e^{\jmath\theta} = \cos(\theta) + \jmath \sin(\theta).$$

Ο τύπος αυτός μας δίνει την λεγόμενη 'πολική μορφη' ενός μιγαδικού $z = re^{\jmath\theta} = r\cos(\theta) + \jmath r \sin(\theta)$.

5.2 Χρήση των Μιγαδικών Εκθετικών Σημάτων

Εστω μιγαδικό σήμα $\overline{x}(t) = Ae^{\jmath(\omega_0 t+\phi)}$. Στην πολική του μορφή, έχουμε:

πλάτος: $|\overline{x}(t)| = A$

γωνία: $\arg\{\overline{x}(t)\} = (\omega_0 t + \phi)$

Στην καρτεσιανή του μορφή έχουμε:

$$\overline{x}(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) + \jmath A \sin(\omega_0 t + \phi),$$

όπου:

A είναι το πλάτος (λόγω ορισμού, πρέπει να είναι θετικός αριθμός).

ϕ είναι η μετατόπιση της φάσης (ή απλά η φάση).

ω_0 είναι η συχνότητα σε rad/sec.

Το σήμα που εξετάζαμε στις προηγούμενες παραγράφους προκύπτει από το $\overline{x}(t)$ ως εξής:

$$x(t) = \Re\{\overline{x}(t)\} = \Re\{e^{\jmath(\omega_0 t+\phi)}\} = A\cos(\omega_0 t + \phi).$$

όπου $\Re\{.\}$ σημαίνει πραγματικό μέρος.

6 Αρνητικές και Θετικές Συχνότητες

6.1 Περιστρεφόμενα Μιγαδικά Πλάτη

Ας ορίσουμε τον μιγαδικό αριθμό:

$$X = Ae^{\jmath\phi} \tag{4}$$

Εστω το μιγαδικό σήμα $\overline{x}(t) = Xe^{\jmath\omega_0 t}$. Το X ονομάζεται μιγαδικό πλάτος (complex amplitude ή phasor) του $\overline{x}(t)$. Οποιοδήποτε πραγματικό σήμα $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$ χρειάζεται μονάχα το μιγαδικό του πλάτος και το ω_0 για να αναπαρασταθεί. Συγκεκριμένα:

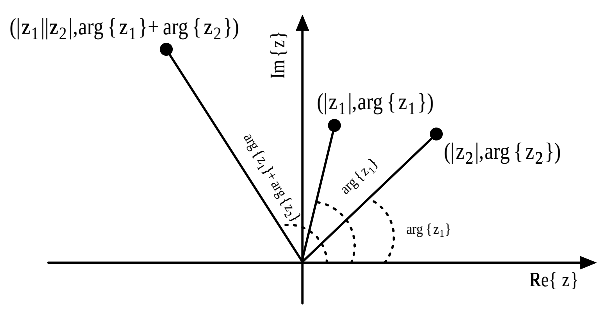
$$\overline{x}(t) = Xe^{\jmath\omega_0 t} = Ae^{\jmath\phi}e^{\jmath\omega_0 t} = Ae^{\jmath\theta(t)}, \tag{5}$$

όπου $\theta(t) = \omega_0 t + \phi$ (σε radians). Αρα $\forall t$ το $\overline{x}(t)$, μπορεί να αναπαρασταθεί στο μιγαδικό επίπεδο ως μιγαδικός αριθμός που είναι. Καθώς ο χρόνος αλλάζει, κινείται μέσα στο μιγαδικό επίπεδο. Το $\overline{x}(t)$ περιστρέφεται και μάλιστα με έναν συγκεκριμένο ρυθμό που ορίζεται από το ω_0.

Υπενθυμίζουμε ότι αν $z_1 = r_1 e^{\jmath\theta_1}$ και $z_2 = r_2 e^{\jmath\theta_2}$ δύο μιγαδικοί αριθμοί τότε το γινόμενο των δύο μιγαδικών δίδεται από τη σχέση:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{\jmath(\theta_1+\theta_2)}$$

Ο πολλαπλασιαμός δύο μιγαδικών φαίνεται γεωμετρικά στο Σχήμα. 5



Σχήμα 5: Πολλαπλασιασμός μιγαδικών

Τώρα, ας παρατηρήσουμε ότι εάν πολλαπλασιάσουμε το $X = Ae^{\jmath\phi}$ με $e^{\jmath\omega_0 t}$ τότε περιστρέφουμε στο μιγαδικό επίπεδο το μιγαδικό πλάτος X κατά τη φορά που ορίζει το πρόσημο του ω_0. Το μιγαδικό πλάτος X θα κινείται με ταχύτητα που ορίζει το μέτρο του ω_0. Παρατηρούμε λοιπόν ότι όταν ο χρόνος t μεταβάλλεται:

Αν $\omega_0 > 0$ θα λέμε ότι το phasor περιστρέφεται πρός την *θετική* κατεύθυνση, καθώς το μιγαδικό πλάτος περιστρέφεται αντίθετα με τους δείκτες του ρολογιού (ορθή μαθηματική φορά).

Αν $\omega_0 < 0$ θα λέμε ότι το $\theta(t)$ θα αλλάζει προς την *αρνητική* κατεύθυνση και το μιγαδικό πλάτος θα περιστρέφεται σύμφωνα με τους δείκτες του ρολογιού.

Ετσι, το περιστρεφόμενο μιγαδικό πλάτος (δηλ. το εκθετικό μιγαδικό σήμα) λέγεται να έχει αντίστοιχα θετική ή αρνητική συχνότητα.

6.2 Αντίστροφες σχέσεις του Euler

Ιδιαίτερα σημαντικές για να χειριζόμαστε μιγαδικά σήματα είναι οι αντίστροφες σχέσεις του Euler. Εδω θα δούμε που χρησιμεύει και η έννοια του μιγαδικού πλάτους. Οι αντίστροφες σχέσεις του Euler είναι οι εξής:

$$\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}, \tag{6}$$

$$\sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \tag{7}$$

Αρα κάθε ημιτονοειδές σήμα (πραγματικό) μπορεί να γραφτεί ως:

$$A\cos(\omega_0 t + \phi) = A(\frac{e^{j(\omega_0 t+\phi)} + e^{-j(\omega_0 t+\phi)}}{2}) = \frac{1}{2}Ae^{j\phi}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}Ae^{-j\phi}e^{-j\omega_0 t} =$$

$$\frac{1}{2}Xe^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}X^*e^{-j\omega_0 t} = \frac{1}{2}\overline{x}(t) + \frac{1}{2}\overline{x}^*(t) = \Re\{\overline{x}(t)\}.$$

όπου * σημαίνει συζυγές [2]. Επομένως το πραγματικό ημιτονοειδές σήμα με συχνότητα ω_0 γράφεται ως άθροισμα δύο μιγαδικών εκθετικών σημάτων, ένα με θετική συχνότητα $\frac{1}{2}Xe^{j\omega_0 t}$ ***και*** ένα με αρνητική συχνότητα $\frac{1}{2}X^*e^{-j\omega_0 t}$.

7 Πρόσθεση σημάτων

Εστω ότι έχουμε ένα πιο σύνθετο σήμα, το οποίο αποτελείται από πολλά ημιτονοειδή ίδιας συχνότητας:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(\omega_0 t + \phi_k)$$

[2] Αν $z = x + jy$ τότε $z^* = x - jy$

Η έκφραση αυτή μπορεί να απλοποιηθεί αρκετά, αλλά αυτό είναι δύσκολο να γίνει με τους γνωστούς τύπους της τριγωνομετρίας. Αν χρησιμοποιήσουμε όμως μιγαδικά πλάτη υπάρχει αρκετή απλοποίηση:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \textstyle\sum_{k=1}^{N} A_k \cos(\omega_0 t + \phi_k) \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{N} \Re\{A_k e^{\jmath(\omega_0 t + \phi_k)}\} \\
&= \Re\{\textstyle\sum_{k=1}^{N} A_k e^{\jmath(\omega_0 t + \phi_k)}\} \\
&= \Re\{[\textstyle\sum_{k=1}^{N} A_k e^{\jmath\phi_k}] e^{\jmath(\omega_0 t)}\} \\
&= \Re\{\mathcal{A} e^{\jmath\phi} e^{\jmath(\omega_0 t)}\} \\
&= \Re\{\mathcal{A}\cos(\omega_0 t + \phi) + \jmath\mathcal{A}\sin(\omega_0 t + \phi)\} \\
&= \mathcal{A}\cos(\omega_0 t + \phi)
\end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \sqrt{(\sum_{k=1}^{N} \Re\{A_k e^{\jmath\phi_k}\})^2 + (\sum_{k=1}^{N} \Im\{A_k e^{\jmath\phi_k}\})^2} \\
\phi &= \tan^{-1} \frac{\sum_{k=1}^{N} \Im\{A_k e^{\jmath\phi_k}\}}{\sum_{k=1}^{N} \Re\{A_k e^{\jmath\phi_k}\}}
\end{aligned}$$

Σε αυτό το παράδειγμα, πήγαμε από πολικές συντεταγμένες σε καρτεσιανές, για να διευκολύνουμε την πρόσθεση των μιγαδικών αριθμών, και μετά επιστρέψαμε πίσω στις πολικές συντεταγμένες. Υπενθυμίζουμε ότι αν $z_1 = r_1 e^{\jmath\phi_1}$ και $z_2 = r_2 e^{\jmath\phi_2}$ τότε

$$z_1 + z_2 = r_1 e^{\jmath\phi_1} + r_2 e^{\jmath\phi_2} = (x_1 + \jmath y_1) + (x_2 + \jmath y_2) = (x_1 + x_2) + \jmath(y_1 + y_2) = z = |z| e^{\jmath\phi}.$$

όπου

$$\begin{aligned}
|\ | &= \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \\
\phi &= \tan^{-1} \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}
\end{aligned}$$

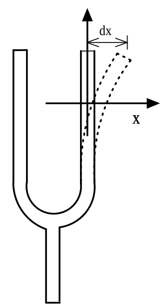
8 Φυσική του Διαπασών

Εδώ θα δούμε πως παράγονται τα ηχητικά κύματα από ένα διαπασών. Το διαπασών είναι ένα όργανο που όταν διεγερθεί (το χτυπήσεις κάπου) παράγει ήχο μιας συγκεκριμένης συχνότητας (συνήθως τα 440 Hz = La). Οι μουσικοί το χρησιμοποιούν για να κουρδίζουν τα μουσικά όργανα. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι χτυπάμε το διαπασών στη μια του άκρη, η οποία αρχίζει να ταλαντώνεται, μεταδίδει την ταλάντωση της στο αέρα και έτσι παράγεται ο ήχος. Το φυσικό φαινόμενο της ταλάντωσης, γενικώς, περιγράφεται από δύο τύπους:

$F = m\gamma$, (νόμος του Νεύτωνα), όπου m είναι η μάζα και γ η επιτάχυνση

$F = -kx$, (νόμος του Hooke), όπου k μια σταθερά που έχει να κάνει με την ελαστικότητα του διαπασών, και x η μετατόπιση από την θέση ισορροπίας.

Στο Σχήμα. 6 φαίνεται σχηματικά (αρκετά απλοποιημένα) η ταλάντωση του διαπασών καθώς και οι μετατοπίσεις που ορίστηκαν παραπάνω.



Σχήμα 6: Παλλόμενο διαπασών

Αν πάρουμε τώρα ένα οποιοδήποτε σημείο πάνω στην παλλόμενη άκρη του διαπασών και θεωρήσουμε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις ώστε οι δύο παραπάνω σχέσεις να περιγράφουν τη συγκεκριμένη ταλάντωση, τότε έχουμε:

$$m\gamma = -kx \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx.$$

Η διαφορική αυτή εξίσωση, και η επίλυση της δεν θα μας απασχολήσει τώρα. Παρατηρούμε όμως ότι μια συνάρτηση της μορφής $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ ικανοποιεί την παραπάνω διαφορική εξίσωση. Δηλαδή ένα οποιοδήποτε σημείο πάνω στην παλλόμενη άκρη του διαπασών, κάνει ημιτονοειδή κίνηση, επομένως παράγει έναν ημιτονοειδή ήχο.

Πως θα πρέπει να κατασκευάσουμε το διαπασών μας προκειμένου να παράγει μια συγκεκριμένη νότα; Για να απαντήσουμε αυτό το ερώτημα, θα πρέπει να βρούμε μια σχέση ανάμεσα στο ω_0 και στα k και m την οποία το διαπασών μας θα πρέπει να ικανοποιεί. Παίρνουμε λοιπόν την εξίσωση που περιγράφει την κίνηση:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \Rightarrow \frac{k}{m} = -\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{x} = -\frac{-\omega_0^2\cos(\omega_0 t)}{\cos(\omega_0 t)} = \omega_0^2 \Rightarrow \omega_0 = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Σημειώστε ότι:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2\cos(\omega_0 t)$$

Επομένως, προκειμένου να φτιάξουμε ένα διαπασών που να παράγει ήχο κάποιας συγκεκριμένης συχνότητας πρέπει να ρυθμίσουμε τη μάζα του και το είδος του υλικού (συντελεστής k).

Οπως ήδη είπαμε και παραπάνω, *μια* λύση στο πρόβλημα του παλλόμενου διαπασών είναι η:

$$x(t) = \cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t).$$

Αν προσέξουμε όμως καλύτερα κατά την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης που σχηματίζεται, θα δούμε ότι υπάρχουν άπειρες λύσεις, γιατί μας λείπουν δύο παράμετροι, οι οποίες προκύπτουν από τις ‘οριακές συνθήκες ’, δηλαδή την ακριβή θέση του βραχίονα του διαπασών την στιγμή $t = 0$. Οπως μπορεί κάποιος να συμπεράνει και δίχως να λύσει την διαφορική εξίσωση, η μια παράμετρος που μας λείπει είναι η φάση. Εάν ο βραχίονας είναι λίγο δεξιά όταν αρχίσει το διαπασών να πάλλεται, τότε η φάση θα έχει την αντίστοιχη μετατόπιση. Η άλλη παράμετρος είναι το πλάτος της ταλάντωσης ή αλλιώς η ένταση του παραγόμενου ήχου. Εαν χτυπήσουμε με μεγαλύτερη δύναμη το διαπασών, θα παραχθεί ισχυρότερος ήχος. Επομένως, όλες οι λύσεις είναι της μορφής:

$$x(t) = A\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi),$$

όπου A το πλάτος της ταλάντωσης και ϕ η φάση της. Για κάθε A, ϕ, η παραπάνω λύση, αποτελεί λύση της διαφορικής εξίσωσης όπως εύκολα μπορείτε να διαπιστώσετε. Αξιοσημείωτο είναι ότι δεδομένου του διαπασών, η συχνότητα που θα παραχθεί είναι ανεξάρτητη της δύναμης με την οποία θα το διεγείρουμε.

Σημειώματα

Σημείωμα αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης