ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Ενότητα: Τυχαίες Διαδικασίες

Ιωάννης Στυλιανού

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

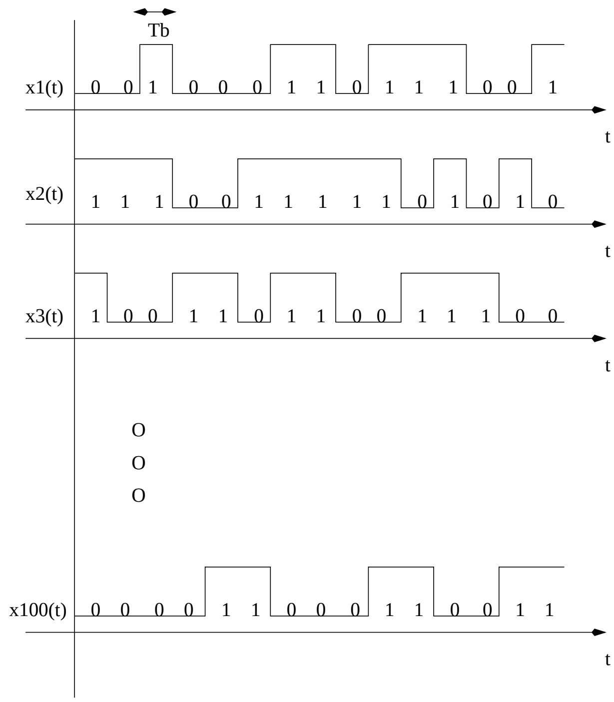
Τυχαία σήματα

Μια άλλη σπουδαία κατηγορία σημάτων ισχύος είναι τα τυχαία σήματα. Τι είναι όμως τυχαία σήματα; Είναι σήματα τα οποία δεν έχουν πραγματοποιηθεί ακόμα. Αυτό ίσως να μπερδεύει ακόμα περισσότερο. Αν δεν έχουν πραγματοποιηθεί ακόμα σημαίνει ότι δεν υπάρχουν. Αρα τι συμπέρασμα μπορούμε να βγάλουμε για πράγματα-σήματα-αριθμούς που δεν υπάρχουν ακόμα; Και όμως χρησιμοποιούμε σε πολλές περιστάσεις τυχαία σήματα στην καθημερινή μας ζωή. Μάλιστα παίρνουμε αποφάσεις για πράγματα που δεν έχουν πραγματοποιηθεί. Για να κάνουμε πιο συγκεκριμένο το παράδειγμά μας και να έχει συγγένεια με την επιστήμη των υπολογιστών ας υποθέσουμε ότι θέλεται να υπολογίσετε το εύρος ζώνης φάσματος που θα χρησιμοποιείσετε για τη μετάδοση δεδομένων μεταξύ χρηστών και ενός διακομιστή (server). Οπως ίσως ήδη γνωρίζεται το εύρος ζώνης κοστίζει. Δηλ. δεν μπορείτε να χρησιμοποιείσετε απεριόριστο ούτε πολύ μεγάλο εύρος ζωνής για τη μετάδοση δεδομένων τα οποία έχουν πολύ μικρό εύρος ζωνής. Αυτό ονομάζεται σπατάλη ενέργειας και χρημάτων.

Εστω ότι έχετε 100 χρήστες οι οποίοι στέλνουν δεδομένα στον διακομιστή. Τα δεδομένα είναι ψηφιακά επομένως κάθε στιγμή οι δυνατές τιμές του σήματος των δεδομένων μπορεί να είναι 0 ή 1 (δυαδικό σύστημα). Εστω επίσης ότι έχουμε περιθώριο να έχουμε ρυθμό K bits/sec όπου κάθε bit έχει χρονική διάρκεια T_b δευτερόλεπτα. Σας έχουν αναθέσει το σχεδιασμό αυτού του συστήματος που σημαίνει ότι πρέπει να προσδιορίσετε τις απαιτήσεις σε εύρος ζώνης ενός τέτοιου συστήματος. Ενας σωστός σχεδιασμός, που σημαίνει ακριβής σχεδιασμός, θα επηρεάσει την ποιότητα των υπηρεσιών που θα προσφέρεται στους χρήστεσ-συνδρομητές σας. Μια υποβάθμιση στον υπολογισμό του εύρους ζώνης θα σημαίνει πολλά προβλήματα στην μετάδοση των δεδομένων. Μια υπερεκτίμηση στο εύρος ζώνης θα σημαίνει υψηλότερο κόστος λειτουργίας του συστήματος. Με λίγα λόγια και στις δύο περιπτώσεις εσείς θα χάσετε τη δουλειά σας. Ενα παράδειγμα με πιθανά δεδομένα φαίνονται στο Σχήμα.1. Για να συλλάβετε τη σημασία της ανάλυσης τυχαίων σημάτων θα πρέπει να σημειωθεί ότι προφανώς σας ζητάνε να σχεδιάσετε το σύστημα πριν οι χρήστες αρχίσουν να στέλνουν δεδομένα. Δηλαδή πριν υπάρξουν τα δεδομένα-σήματα που αυτοί θα στείλουν. Επομένως θα πρέπει να μελετήσετε τις ιδιότητες αυτών των σημάτων πριν αυτά πραγματοποιηθούν.

Επιστρέφουμε ξανά στο πρόβλημά μας: τι εύρος ζώνης φάσματος θα χρησιμοποιήσουμε; Τι επιλογές έχουμε; Π.χ.

1. Παρατηρούμε μία μόνο κυματομορφή-σήμα. Για παράδειγμα την $x_1(t)$ για κάποιο χρονικό



Σχήμα 1: Παράδειγμα διαδικών δεδομένων από 100 χρήστες.

διάστημα, βρίσκουμε το φάσμα πλάτους των συχνοτήτων της (απλά στη συνέχεια: 'φάσμα') και από εκεί το εύρος ζώνης και δεχόμαστε αυτό ως το εύρος ζώνης ΟΛΩΝ των γραμμών σύνδεσης (χρηστών).

2. Να επαναλάβουμε το παραπάνω για κάθε χρήστη και έτσι να δεχτούμε διαφορετικό εύρος ζώνης για κάθε έναν από τους χρήστες (κάτι που προφανώς αυξάνει την πολυπλοκότητα της διαχείρησης ενός τέτοιου συστήματος).

3. Να υπολογίσουμε τον μέσο όρο των παραπάνω ευρών φάσματος και να ορίσουμε αυτό σαν εύρος ζώνης ΟΛΩΝ των χρηστών.

Ποιό από τα παραπάνω είναι σωστά και κάτω από ποιές συνθήκες;

Για να αναλύσουμε περισσότερο το πρόβλημά μας θα ήταν καλό να εισάγουμε ορισμούς που θα μας βοηθούσαν στην περιγραφή του.

Τυχαίο ονομάζουμε ένα σήμα αν εξαρτάται κατά ένα τρόπο από έναν τυχαίο νόμο. Π.χ. το σήμα

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

όπου ϕ είναι μια μεταβλητή που δεν γνωρίζουμε αλλά από την εμπειρία μας ξέρουμε ότι αυτή η μεταβλητή μπορεί να πάρει τιμές από το σύνολο

$$-\pi \leq \phi < \pi$$

είναι ένα τυχαίο σήμα. Η στιγμιαία τιμή του σήματος δεν μπορεί να είναι γνωστή αν δεν γνωρίζουμε την τιμή της φάσης μετατόπισης. Επειδή ένα τέτοιο σήμα εξαρτάται τόσο από το χρόνο όσο και από τη φάση, μπορούμε να το περιγράψουμε ως μια συνάρτηση δύο μεταβλητών

$$x(t, \phi) = A \cos (2\pi f_0 t + \phi)$$

Παρατηρούμε ότι μπορεί να μη γνωρίζουμε σε κάθε στιγμή τις τιμές του παραπάνω τυχαίου σήματος, όμως γνωρίζουμε π.χ. τα χαρακτηριστικά του φάσματος πλάτους του σήματος: δηλαδή ότι έχει δύο συναρτήσεις Dirac με πλάτος ανάλογο του A στις συχνότητες $f = -f_0$ και $f = f_0$.

Για διαφορετικές τιμές του ϕ ένα διαφορετικό σήμα θα δημιουργείται

$$x(t, \phi_1), x(t, \phi_2), \cdots x(t, \phi_l)$$

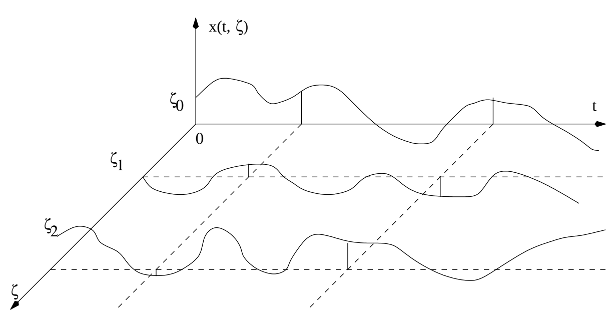
Κάθε φορά που καθορίζουμε την τιμή της φάσης λέμε ότι έχουμε μια πραγματοποίση του τυχαίου σήματος.

Η οικογένεια όλων αυτών των τυχαίων σημάτων ονομάζεται τυχαία διαδικασία και συμβολίζεται ως

$$\{x(t, \zeta)\}$$

όπου ζ συμβολίζει την τυχαία φύση της διαδικασίας.

Για κάθε τιμή ζ_i, η τυχαία διαδικασία περιορίζεται σε ένα μέλος της τυχαίας διαδικασίας, $x(t, \zeta_i)$ ή απλά $x(t)$ και ονομάζεται τυχαίο σήμα. Ενα παράδειγμα μιας τυχαίας διαδικασίας φαίνεται στο Σχήμα.2. Σε μια τέτοια περίπτωση αναλύουμε το τυχαίο σήμα στο χρόνο χρησιμοποιώντας



Σχήμα 2: Παράδειγμα τυχαίας διαδικασίας.

χρονικά μεγέθη. Για παράδειγμα ο χρονικός μέσος όρος του τυχαίου σήματος $x(t)$ είναι

$$\overline{x} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, dt$$

και η αυτοσυσχέτιση στο χρόνο είναι

$$\phi_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau)\, dt$$

Για κάθε τιμή του χρόνου t_i η διαδικασία περιορίζεται σε μια τυχαία μεταβλητή $x(t_i, \zeta)$ ή απλά $x(t_i)$. Σε μια τέτοια περίπτωση αναλύουμε το σήμα στατιστικά. Η τυχαία μεταβλητή $x(t_i)$ υπακούει σε κάποιο κανόνα πιθανοτήτων, δηλ. παίρνει τιμές σύμφωνα με κάποια πιθανότητα που καθορίζεται απο τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής. Για να είμαστε ακριβείς, η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής $x(t_i)$ εκφράζει την πιθανότητα να είναι η τυχαία μεβλητή $x(t_i)$ μικρότερη ή ίση από μια τιμή x

$$F_{x(t_i)}(x) = Prob(x(t_i) \leq x)$$

όπου $Prob$ σημαίνει πιθανότητα. Η παράγωγος της $F_{x(t_i)}$ ως προς x δίνει τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (Probability Density Function - pdf)

$$p_{x(t_i)}(x) = \frac{d\, F_{x(t_i)}(x)}{dx}$$

Ονομάζουμε <u>στατιστική μέση τιμή</u> της τυχαίας μεταβλητής $x(t_i)$

$$\mu_{x(t_i)} = E[x(t_i)] = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{x(t_i)}(x) dx$$

όπου γενικά $E[x(t_i)]$ δηλώνει αναμενώμενη τιμή (Expected value) και εδώ ειδικά δηλώνει τη στατιστική μέση τιμή της τυχαίας μεβλητής.

Αν θεωρήσουμε μια άλλη στιγμή t_j τότε ορίζουμε την από κοινού συνάρτηση κατανομής να είναι

$$F_{x(t_i)\, x(t_j)}(x_1, x_2) = Prob(x(t_i) \leq x_1, x(t_j) \leq x_2)$$

που σημαίνει την πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή $x(t_i)$ να είναι μικρότερη από μια τιμή x_1 ΚΑΙ η τυχαία μεταβλητή $x(t_j)$ να είναι μικρότερη από μια τιμή x_2. Τότε η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (joint pdf) ορίζεται να είναι

$$p_{x(t_i)\, x(t_j)}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2\, F_{x(t_i)\, x(t_j)}(x_1, x_2)}{\partial x_1\, \partial x_2}$$

Χρησιμοποιώντας την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ορίζουμε την *στατιστική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης*

$$R_x(t_i, t_j) = E[x(t_i), x(t_j)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p_{x(t_i)\,x(t_j)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

Αν ο στατιστικός μέσος όρος είναι ανεξάρτητος της χρονικής στιγμής t_i, δηλ.

$$E[x(t_i)] = \text{ σταθερά } \quad \forall\, t_i$$

τότε η τυχαία διαδικασία ονομάζεται στάσιμη πρώτης τάξης.

Αν επιπλέον η στατιστική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης δεν εξαρτάται από τις χρονικές στιγμές t_i και t_j αλλά μόνο από τη διαφορά τους $\tau = |t_i - t_j|$ (δηλαδή την μεταξύ τους απόσταση) τότε η τυχαία διαδικασία ονομάζεται στάσιμη διαδικασία δεύτερης τάξης.

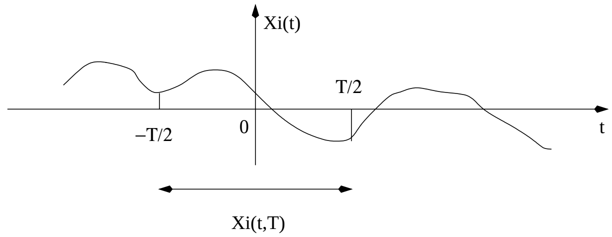
Μια διαδικασία η οποία είναι στάσιμη δεύτερης τάξης ονομάζεται *διαδικασία στάσιμη μϵ την ϵυρϵία έννοια.*

Σε περίπτωση που τα χρονικά μεγέθη (μέση τιμή και αυτοσυσχέτιση) είναι ίσα με τα στατιστικά μεγέθη (στατιστική μέση τιμή και στατιστική αυτοσυσχέτιση) τότε η τυχαία διαδικασία ονομάζεται *ϵργοδική*.

Η ιδιότητα της εργοδικότητας είναι πολύ σημαντική. Σημαίνει π.χ. ότι μπορούμε να υπολογίσουμε την αυτοσυσχέτιση στο χρόνο χρησιμοποιώντας την στατιστική αυτοσυσχέτιση αν η τελευταία είναι εύκολα υπολογίσιμη, και αντιστρόφως. Δηλαδή για μια διαδικασία που είναι εργοδική μπορούμε να επιλέξουμε μεταξύ χρονικών και στατιστικών μεγεθών ανάλογα με το πια μεγέθη υπολογίζονται πιο εύκολα. Στην πράξη όμως είναι δύσκολο να δείξουμε την εργοδικότητα μιας διαδικασίας και συνήθως δουλεύουμε με την παραδοχή ότι η διαδικασία είναι εργοδική (μέχρι να διαψευστούμε). Ευτυχώς αρκετές σημαντικές εφαρμογές περιγράφονται από εργοδικές διαδικασίες.

Ας επιστρέψουμε στο αρχικό πρόβλημα και ας θεωρήσουμε τον χρήστη i (από τους 100) ο οποίος στέλνει για παράδειγμα το σήμα που φαίνεται στο Σχήμα. 3. Για να είμαστε πιο γενικοί θεωρήσαμε ένα τυχαίο σήμα μιας οποιαδήποτε μορφής (και όχι δυαδικής μορφής όπως στην αρχή του προβλήματος). Γενικά δεν ισχύει

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x_i(t)|\, dt < \infty$$



Σχήμα 3: Παράδειγμα σήματος από το χρήστη i.

επομένως δεν μπορούμε να υπολογίσουμε τον Μ.Φ. του σήματος. Αναμενόμενο βέβαια, επειδή όπως είπαμε και στην αρχή είμαστε στην κατηγορία των σημάτων ισχύος. Η τεχνική λοιπόν που θα χρησιμοποιήσουμε και εδώ είναι να απομονώσουμε μόνο ένα κομμάτι (παράθυρο) του σήματος. Ετσι ας παρατηρήσουμε το σήμα μέσα από ένα παράθυρο μήκους T όπως φαίνεται στο Σχήμα. 3. Τότε

$$x_i(t) = \lim_{T\to\infty} x_i(t,T)$$

όπου

$$x_i(t,T) = x_i(t) rect(\frac{t}{T})$$

Ο Μ.Φ. του κομματιού μήκους T του σήματος είναι

$$\begin{aligned} X_i(f,T) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_i(t,T) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} x_i(t,T) e^{-j2\pi ft} dt \end{aligned}$$

Ονομάζουμε Περιοδόγραμμα το μέγεθος

$$\Phi_{x_i}(f,T) = \frac{1}{T} |X_i(f,T)|^2$$

Η ισχύς που υπάρχει σε αυτό το διάστημα είναι

$$P_{x_i}(T) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{x_i}(f,T)\, df$$

Προφανώς για κάθε χρήστη το περιοδόγραμμα θα είναι διαφορετικό και η μέση τιμή όλων αυτών των περιοδογραμμάτων θα εκφράζει την τάση που υπάρχει στο διάστημα T. Επιπλέον κάθε περιοδόγραμμα είναι μέγεθος στοχαστικό άρα η μέση τιμή αυτών θα υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Phi_x(f,T) = E[\Phi_{x_i}(f,T)]$$

Ονομάζουμε φάσμα ισχύος, $\Phi_x(f)$, της στοχαστικής διαδικασίας, το όριο της $\Phi_x(f,T)$ όταν $T \to \infty$:

$$\begin{aligned}\Phi_x(f) &= \lim_{T\to\infty}\{\Phi_x(f,T) = E[\Phi_{x_i}(f,T)]\} \\ &= \lim_{T\to\infty} E[\frac{|X_i(f,T)|^2}{T}]\end{aligned}$$

Για να μην αποκοβόμαστε πολύ από το αρχικό πρόβλημα ... αν εμείς μπορούμε να υπολογίσουμε το φασματική πυκνότητα ισχύος, $\Phi_x(f)$, τότε θα μπορούσαμε να απαντήσουμε στην ερώτηση για το εύρος ζώνης της διαδικασίας. Εδώ λοιπόν έχουμε φτάσει σε έναν τρόπο υπολογισμού: επιλέγουμε μια περιοχή σήματος μήκους T για κάθε χρήστη, υπολογίζουμε τον μετ. Fourier στην κάθε περιοχή και μετά το περιοδόγραμμα που αντιστοιχεί σε κάθε μια από αυτές τις περιοχές. Στη συνέχεια υπολογίζουμε τη μέση τιμή των περιοδογράμμων. Η φασματική πυκνότητα ισχύος τότε θα είναι το όριο του παραπάνω αποτελέσματος όταν το εύρος της περιοχής, T, γίνει τεράστιο (δηλ ∞). Προφανώς για να μπορούμε να κάνουμε κάτι τέτοιο θα πρέπει το αρχικό μας σήμα να περιγράφεται αναλυτικά από μια εξίσωση έτσι ώστε στο τέλος να προκύψει μια συνάρτηση ως προς T για να μπορούμε να υπολογίσουμε το όριο. Από την άλλη θα πρέπει να υπάρχει αυτό το όριο. Ολα αυτά βέβαια αν το σήμα μας μπορεί να περιγραφεί με εξισώσεις. Αν δεν έχουμε μια μαθηματική περιγραφή των σημάτων τότε τα παραπάνω δεν μπορούν να εφαρμοστούν. Ευτυχώς στο συγκεκριμένο πρόβλημα γνωρίζουμε πολύ καλά το σήμα (παίρνει μόνο δύο τιμές (0 ή 1) και κάθε τιμή έχει διάρκει T_b δευτερόλεπτα) αν και δεν γνωρίζουμε αναλυτικά μια μαθηματική σχέση που το περιγράφει.

Πολλές από τις παραπάνω δυσκολίες αποφεύγονται όταν μετακινηθούμε σε χρήση των στατιστικών μεγεθών. Συγκεκριμένα υπάρχει το περίφημο θεώρημα των Wiener-Khinchin που λέει ότι: Αν μια διαδικασία είναι στάσιμη με την ευρεία έννοια τότε η φασματική πυκνότητα ισχύος είναι ο Μ.Φ. της στατιστικής συνάρτησης αυτοσυσχέτισης

$$\Phi_x(f) = F\{R_x(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau$$

Απόδειξη:

Ας θεωρήσουμε το περιοδόγραμμα του χρήστη x_i

$$\Phi_{x_i}(f,T) = \frac{1}{T}|X_i(f,T)|^2 = \frac{1}{T}X_i^*(f,T)X_i(f,T)$$

όπου

$$X_i(f,T) = \int_{-\infty}^{\infty} x_i(t)rect(\frac{t}{T})e^{-j2\pi ft}dt$$

Επομένως

$$\begin{aligned}\Phi_{x_i}(f,T) &= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_i(t')rect(\frac{t'}{T})e^{j2\pi f t'} x_i(t)rect(\frac{t}{T})e^{-j2\pi f t}\,dt'\,dt \\ &= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_i(t)x_i(t')rect(\frac{t}{T})rect(\frac{t'}{T})e^{-j2\pi f(t'-t)}\,dt\,dt'\end{aligned}$$

όπου θεωρήσαμε το σήμα (χωρίς αυτό να περιορίζει την απόδειξη) να είναι πραγματικό. Επειδή η διεργασία είναι στάσιμη με την ευρεία έννοια μόνο η απόσταση των χρονικών στιγμών $\tau = t' - t$ έχει σημασία και όχι οι συγκεκριμένες χρονικές στιγμές. Αλλάζοντας μεταβλητές στην παραπάνω σχέση, $t' = \tau + t$, προκύπτει

$$\Phi_{x_i}(f,T) = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_i(t)x_i(t+\tau)rect(\frac{t}{T})rect(\frac{t+\tau}{T})e^{-j2\pi f\tau}\,dt\,d\tau$$

Στην παραπάνω σχέση μόνο οι τιμές $x_i(t)$ και $x_i(t+\tau)$ είναι τυχαίες μεταβλητές. Ετσι η μέση τιμή για όλους του χρήστες είναι

$$E[\Phi_{x_i}(f,T)] = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E[x_i(t)x_i(t+\tau)]rect(\frac{t}{T})rect(\frac{t+\tau}{T})e^{-j2\pi f\tau}\,dt\,d\tau$$

Ομως

$$E[x_i(t)x_i(t+\tau)] = R_x(\tau)$$

Επομένως

$$\begin{aligned}E[\Phi_{x_i}(f,T)] &= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)rect(\frac{t}{T})rect(\frac{t+\tau}{T})e^{-j2\pi f\tau}\,dt\,d\tau \\ &= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)[\int_{-\infty}^{\infty} rect(\frac{t}{T})rect(\frac{t+\tau}{T})dt]e^{-j2\pi f\tau}d\tau\end{aligned}$$

Το εσωτερικό ολοκλήρωμα στην παραπάνω σχέση είναι η αυτοσυσχέτιση δύο παράθυρων μήκους T το κάθε ένα. Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι η αυτοσυσχέτιση αυτών είναι ένα τριγωνικό σήμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} rect(\frac{t}{T})rect(\frac{t+\tau}{T})dt = T(1-\frac{|\tau|}{T})$$

Αρα

$$E[\Phi_{x_i}(f,T)] = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)(1-\frac{|\tau|}{T})e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

Για να υπολογίσουμε τη φασματική πυκνότητα ισχύος θα πρέπει σύμφωνα με αυτά που έχουμε μάθει να υπολογίσουμε το όριο της παραπάνω σχέσης όταν $T \to \infty$

$$\begin{aligned}\Phi_x(f) &= \lim_{T\to\infty} E[\Phi_{x_i}(f,T)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau\end{aligned}$$

Επομένως δείξαμε ότι η φασματική πυκνότητα ισχύος μιας διεργασίας η οποία είναι στάσιμη με την ευρεία έννοια υπολογίζεται από τον μετασχηματισμό Fourier της στατιστικής αυτοσυσχέτισης της διεργασίας. Αυτό το αποτέλεσμα πέρα της σημασίας που έχει για την ανάλυση τυχαίων σημάτων είναι σπουδαίο αποτέλεσμα γιατί ομαδοποιεί όλα τα σήματα τυχαία και μή, ενέργειας και ισχύος. Ετσι, γνωρίζουμε τώρα από όλα αυτά που έχουμε δεί ότι η φασματική πυκνότητα ενός οποιαδήποτε σήματος υπολογίζεται από τον μετασχηματισμό Fourier της (εκάστοτε) συνάρτησης αυτοσυσχέτισής του.

Από τα παραπάνω αποτελέσματα βλέπουμε ότι είναι σημαντικό να μπορούμε να υπολογίσουμε τη στατιστική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης. Για τον υπολογισμό της αυτοσυσχέτισης όμως είναι σημαντικό να γνωρίζουμε είτε αναλυτικά είτε πειραματικά τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που χαρακτηρίζει τη διαδικασία.

Παράδειγμα :

Θέλουμε να υπολογίσουμε τη φασματική πυκνότητα ισχύος της τυχαίας διαδικασίας

$$x(t) = B\sin(\omega t + a)$$

όπου το πλάτος B και η συχνότητα ω είναι γνωστά μεγέθη (άρα ντετερμινιστικά) ενώ η φάση a είναι μια τυχαία μεταβλητή η οποία κατανέμεται ομοιόμορφα στο διάστημα $[-\pi\ \pi)$. Αρα η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής a είναι

$$p_A(a) = \frac{1}{2\pi} \quad -\pi \le a < \pi$$

Υπενθυμίζουμε ότι αν x είναι μια τυχαία μεταβλητή και $g(x)$ μια συνάρτηση αυτής, τότε:

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)p_X(x)dx$$

Στατιστική μέση τιμή για τη χρονική στιγμή t_i:

$$\begin{aligned}
\mu_{x(t_i)} = E[x(t_i)] &= \int_{-\infty}^{\infty} B\sin(\omega t_i + a)p_A(a)da \\
&= \frac{B}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(\omega t_i + a)da \\
&= 0
\end{aligned}$$

Προφανώς το παραπάνω αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο της χρονικής στιγμής που θα επιλέξουμε. Επομένως

$$E[B\sin(\omega t + a)] = 0 \quad \forall\ t_i$$

Στατιστική Αυτοσυσχέτιση :

$$\begin{aligned} R_x(t_1,t_2) &= E[x(t_1)\,x(t_2)] \\ &= B^2 E[\sin(\omega t_1 + a)\sin(\omega t_2 + a)] \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\begin{aligned} R_x(t_1,t_2) &= \frac{1}{2}B^2 E[\cos(\omega\underbrace{(t_2-t_1)}_{\tau}) - \cos(\omega(t_2+t_1)+2a)] \\ &= \frac{1}{2}B^2\cos(\omega\tau) - \frac{1}{2}B^2\underbrace{E[\cos(\omega(t_2+t_1)+2a)]}_{0} \\ &= \frac{1}{2}B^2\cos(\omega\tau) \end{aligned}$$

Επομένως η στατιστική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της τυχαίας διαδικασίας είναι ένα απλό συνημίτονο. Παρατηρούμε ότι ο στατιστικός μέσος όρος είναι ανεξάρτητος της χρονικής στιγμής που επιλέξαμε και επίσης ότι η συνάρτηση της αυτοσυσχέτισης εξαρτάται μονάχα από την απόσταση των χρόνων που θεωρήσαμε. Επομένως, σύμφωνα με τα παραπάνω η διαδικασία είναι στάσιμη με την ευρεία έννοια. Μπορούμε λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα των Wiener-Khinchin για να υπολογίσουμε τη φασματική πυκνότητα ισχύος (θεωρώντας $\omega = 2\pi f_0$):

$$\begin{aligned} \Phi_x(f) &= F\{R_x(\tau)\} \\ &= F\{\frac{1}{2}B^2\cos(2\pi f_0\tau)\} \\ &= \frac{1}{4}B^2 F\{e^{j2\pi f_0\tau}\} + \frac{1}{4}B^2 F\{e^{-j2\pi f_0\tau}\} \\ &= \frac{1}{4}B^2\delta(f-f_0) + \frac{1}{4}B^2\delta(f+f_0) \end{aligned}$$

Αρα το εύρος ζώνης είναι $2f_0$ και η ισχύς του σήματος είναι

$$P_x = R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty}\Phi_x(f)df = \frac{B^2}{2}$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι η παραπάνω διαδικασία είναι εργοδική. Πράγματι, η χρονική μέση τιμή είναι

$$\overline{x} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} B\sin(\omega t + a)dt = 0$$

άρα

$$\overline{x} = \mu_x$$

Επίσης

$$\begin{aligned}\phi_x(\tau) &= \lim_{T\to\infty}\frac{B^2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\sin(\omega t + a)\sin(\omega(t+\tau)+a)dt \\ &= \frac{B^2}{2}\cos(\omega\tau)\end{aligned}$$

Δηλαδή

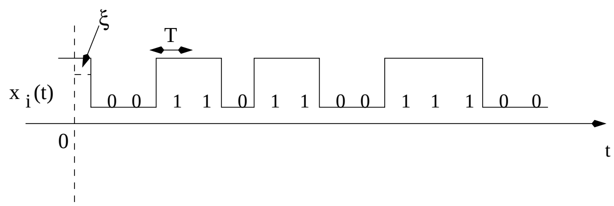
$$\phi_x(\tau) = R_x(\tau)$$

Ετσι, η τυχαία διαδικασία

$$x(t) = B\sin(\omega t + a)$$

με φάση a να είναι μια τυχαία μεταβλητή η οποία κατανέμεται ομοιόμορφα στο διάστημα $[-\pi\ \pi)$ είναι και εργοδική.

Επιστρέφοντας στο αρχικό πρόβλημα, ας θεωρήσουμε ένα υποτιθέμενο δυαδικό σήμα που στέλνει ο χρήστης x_i το οποίο φαίνεται στο Σχήμα. 4. Αν θεωρήσουμε ότι:



Σχήμα 4: Παράδειγμα σήματος από το χρήστη i.

1. Τα δεδομένα κάθε χρήστη βρίσκονται σε διαφορετική θέση ξ από το σημείο παρατήρησης ($t = 0$), όπου $0 \leq \xi < T$. Δηλαδή, ξ είναι μια τυχαία μεταβλητή. Είναι λογικό να θεωρήσουμε ότι η τυχαία αυτή μεταβλητή κατανέμεται ομοιόμορφα στο διάστημα $[0\ T)$. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της διεργασίας είναι ανεξάρτητη του χρόνου t και επομένως η διεργασία είναι στάσιμη.

2. Θεωρούμε επίσης ότι η τιμές που θα έχει το σήμα σε διάφορες χρονικές στιγμές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Αυτό σημαίνει

$$p_{x(t_i)\,x(t_j)}(x_1, x_2) = p_{x(t_i)}(x_1)\ p_{x(t_j)}(x_2)$$

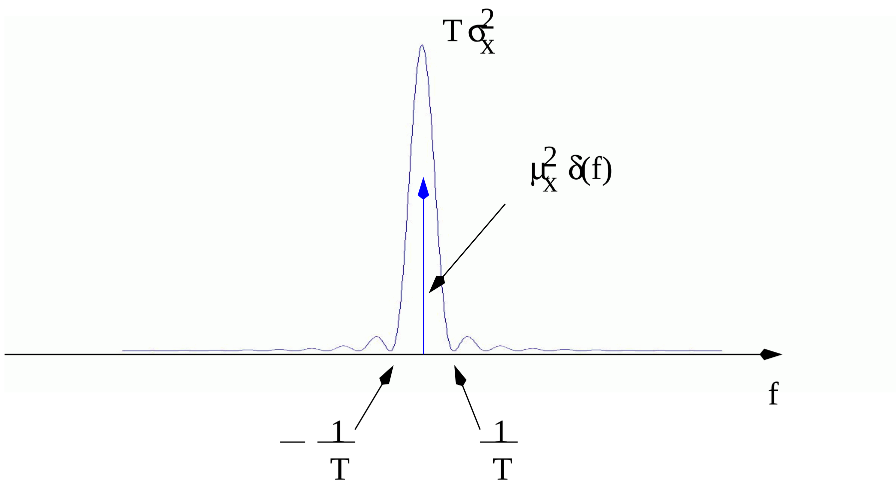
Κάτω από αυτές τις συνθήκες μπορούμε να δείξουμε ότι η στατιστική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης δίδεται από τη σχέση:

$$R_x(t) = \sigma_x^2(1 - \frac{|t|}{T}) + \mu_x^2$$

όπου σ_x^2 είναι η απόκλιση (variance) της διαδικασίας και μ_x η μέση τιμή της.
Από το θεώρημα των Wiener-Khinchin η φασματική πυκνότητα ισχύος της διαδικασίας είναι

$$\Phi_x(f) = F\{R_x(\tau)\} = \sigma_x^2 T sinc^2(fT) + \mu_x^2 \delta(f)$$

και έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα. 5. Από το Σχήμα. 5 παρατηρούμε ότι ουσιαστικά η ισχύς της



Σχήμα 5: Φασματική πυκνότητα ισχύος της διαδικασίας αποστολής δυαδικών δεδομένων με παλμούς όπου κάθε παλμός έχει διάρκεια $T\, sec$.

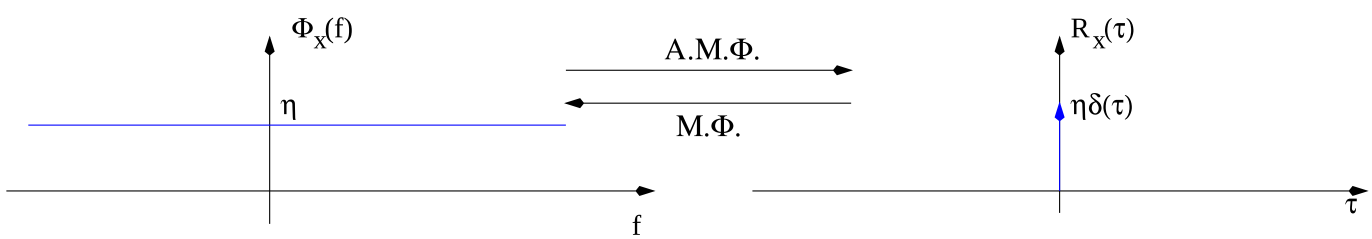
διαδικασίας βρίσκεται μεταξύ των συχνοτήτων $f = -1/T$ και $f = 1/T$. Δηλαδή έχουμε ένα εύρος ζώνης $\Delta f = 2/T$.

Τι μπορούμε να πούμε για την παράμετρο T; Καταρχήν καταλαβαίνουμε ότι το T εξαρτάται από τον αριθμό των $bits/sec$ δηλαδή τον ρυθμό με τον οποίο έχουμε σχεδιάσει το κανάλι επικοινωνίας. Μεγάλος ρυθμός σημαίνει μικρό T. Αυτό σημαίνει ότι οι χρήστες θα είναι ευχαριστημένοι γιατί μεταφέρουν τα δεδομένα τους γρήγορα. Ομως σύμφωνα με τη σχέση της φασματικής πυκνότητας ισχύος που υπολογίσαμε (και όπως φαίνεται και από το Σχήμα. 5) μικρό T σημαίνει μεγάλο εύρος ζώνης (όσο μεγαλύτερο το εύρος ζώνης, τόσο μεγαλύτερη η ισχύς που χρειαζόμαστε για να υποστηρίξουμε τέτοιους υψηλούς ρυθμούς, άρα μεγαλύτερο το κόστος λειτουργίας). Αντίθετα, αν έχουμε χαμηλούς ρυθμούς θα έχουμε μεγάλο T άρα μικρό εύρος ζώνης κ.λ.π.
Αν το εύρος ζώνης είναι δεδομένο (όπως συνήθως) τότε η παραπάνω ανάλυση μπορεί να μας βοηθήσει να σχεδιάσουμε το σύστημα επικοινωνίας επιλέγοντας ρυθμό μετάδοσης σε σχέση με πόσους χρήστες θα μπορούμε να εξυπηρετούμε ταυτόχρονα.

Ενα άλλο σημαντικό παράδειγμα τυχαίου σήματος είναι ο λευκός θόρυβος. Λευκός θόρυβος (σε αντιστοιχία με το λευκό φώς) ονομάζεται το σήμα για το οποίο η ισχύς του κατανέμεται ομοιόμορφα σε όλες τις συχνότητες. Δηλαδή

$$\Phi_x(f) = \eta \quad \forall\ f$$

δηλαδή είναι ένα σταθερό σήμα στο χώρο της συχνότητας. Ο (αντίστροφος) μετασχηματισμός Fourier ενός σταθερού σήματος είναι μια συνάρτηση Dirac. Επιπλέον ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της φασματικής πυκνότητας ισχύος είναι η αυτοσυσχέτιση του σήματος. Επομένως η αυτοσυχέτιση του λευκού θορύβου είναι μια συνάρτηση Dirac. Αυτό σημαίνει ότι δείγματα από ένα τέτοιο σήμα είναι εντελώς ασυσχέτιστα μεταξύ τους (εφόσον η συνάρτηση αυτοσυσχέτισής τους είναι μηδέν για κάθε άλλη χρονική στιγμή). Τα παραπάνω φαίνονται στο Σχήμα. 6.



Σχήμα 6: Αριστερά: Φασματική πυκνότητα ισχύος για ένα σήμα λευκού θορύβου. Δεξιά: Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του ίδιου σήματος.

Συνοπτικά για τον Μετασχηματισμό Fourier

Σήμα ενέργειας

$$
\begin{array}{lcl}
x(t) & \overset{\text{Μ.Φ.}}{\leftrightarrow} & X(f) \\
\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau)dt & \overset{\text{Μ.Φ.}}{\leftrightarrow} & \Phi_x(f) = |X(f)|^2
\end{array}
$$

Σήμα ισχύος

- Ντετερμινιστικό σήμα:

$$
\begin{array}{lcl}
x(t) & \overset{\text{Μ.Φ.}}{\leftrightarrow} \;;; & X(f) \\
\phi_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau)dt & \overset{\text{Μ.Φ.}}{\leftrightarrow} & \Phi_x(f) \overset{??}{=} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}|X(f,T)|^2
\end{array}
$$

όπου $X(f,T) = F\{x(t,T) = x(t)rect(t/T)\}$. Οπου χρησιμοποιούνται ερωτηματικά σημαίνει ότι είναι αμφίβολο αν υπάρχει αντιστοιχία ή ισότητα (δηλ. αν μπορεί να γίνει η αντίστοιχη πράξη).

- Ειδική περίπτωση ντετερμινιστικού σήματος: περιοδικό σήμα με περίοδο T:

$$
x(t) = x(t+mT) \overset{\text{Μ.Φ.}}{\leftrightarrow} X(f) = \sum_k X_k \delta(f-k/T)
$$

όπου

$$
X_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-j2\pi tk/T}dt
$$

Επίσης

$$
\begin{aligned}
\phi_x(\tau) &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau)dt \\
&= \sum_k |X_k|^2 e^{j2\pi\tau k/T}
\end{aligned}
$$

και

$$
\phi_x(\tau) \overset{\text{Μ.Φ.}}{\leftrightarrow} \Phi_x(f) = \sum_k |X_k|^2 \delta(f-k/T)
$$

- Τυχαίο σήμα (στάσιμο και εργοδικό)

$$
\begin{gathered}
x(t) \rightarrow \quad \phi_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau)dt \\
R_x(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)]
\end{gathered}
$$

όπου

$$\begin{aligned}\Phi_x(f) &= F\{R_x(\tau)\} \\ &= \lim_{T\to\infty} E[\frac{1}{T}|X(f,T)|^2]\end{aligned}$$

και $X(f,T) = F\{x(t,T) = x(t)rect(t/T)\}$.

Σημειώματα

Σημείωμα αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης