Θέματα Άλγεβρας, Αριθμητική Γεωμετρία

Λύσεις ασκήσεων Φυλλαδίου 2

Γιάννης Α. Αντωνιάδης

Άσκηση 1:

$$(\alpha)\ \ p=7 \quad : \begin{cases} w_7(35)=1 & |35|_7=\frac{1}{7} \\ w_7(\frac{56}{12})=1 & |\frac{56}{12}|_7=\frac{1}{7} \\ w_7(177553)=0 & |177553|_7=1 \\ w_7(\frac{3}{686})=-3 & |\frac{3}{686}|_7=343=7^3 \end{cases}$$

$$(\beta)\ \ p=3 \quad : \begin{cases} w_3(35)=0 & |35|_3=1 \\ w_3(\frac{56}{12})=-1 & |\frac{56}{12}|_3=3 \\ w_3(177553)=0 & |177553|_3=1 \\ w_3(\frac{3}{686})=1 & |\frac{3}{686}|_7=\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$(\gamma)\ \ p=5 \quad : \begin{cases} w_5(35)=1 & |35|_5=\frac{1}{5} \\ w_5(\frac{56}{12})=0 & |\frac{56}{12}|_5=1 \\ w_5(177553)=0 & |177553|_5=1 \\ w_5(\frac{3}{686})=0 & |\frac{3}{686}|_5=1 \end{cases}$$

Άσκηση 2:

$w_5(\frac{1}{2})=0$ και $w_5(\frac{3}{8})=0$ άρα αφού $w_5(\frac{1}{2})\geq 0$ και $w_5(\frac{3}{8})\geq 0$ έπεται ότι οι $\frac{1}{2}$ και $\frac{3}{8}$ αντίστοιχα είναι ακέραιοι 5-αδικοί.

$2x_0 \equiv 1(mod5) \ \Rightarrow\ x_0 \equiv 3(mod5)$

$2x_1 \equiv 1(mod5^2) \ \Rightarrow\ 2(5k+3) \equiv 1(mod5^2) \ \Rightarrow\ 10k \equiv -5(mod5^2) \ \Rightarrow$

$2k \equiv -1(mod5) \ \Rightarrow\ k \equiv 2(mod5)$ άρα $x_1 = 13$

$2x_2 \equiv 1(mod5^3) \ \Rightarrow\ 2(5^2k+13) \equiv 1(mod5^3) \ \Rightarrow\ 50k \equiv -25(mod5^3) \ \Rightarrow$

$2k \equiv -1(mod5) \ \Rightarrow\ k \equiv 2(mod5) \ \Rightarrow\ x_2 = 63$

$2x_3 \equiv 1(mod5^4) \ \Rightarrow\ 2(5^3k+63) \equiv 1(mod5^4)\ \ 2\cdot 5^3k \equiv -5^3(mod5^4) \ \Rightarrow$

$2k \equiv -1(mod5) \ \Rightarrow\ k \equiv 2(mod5) \ \Rightarrow\ x_3 = 313$

$2x_4 \equiv 1(mod5^5) \ \Rightarrow\ 2(5^4k+313) \equiv 1(mod5^5) \ \Rightarrow\ 2\cdot 5^4k \equiv -5^4(mod5^5) \ \Rightarrow$

$2k \equiv -1(mod5) \ \Rightarrow\ k \equiv 2(mod5) \ \Rightarrow\ x_4 = 1563$

$(\bar{3},\ 1\bar{3},\ 6\bar{3},\ 3\bar{1}3,\ 15\bar{6}3, \cdots)$

$a_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{p^n} \ \Rightarrow\ a_0=3, a_1=2, a_2=2, a_3=2, a_4=2$

Επομένως οι πέντε πρώτοι όροι του 5-αδικού αναπτύγματος του $\frac{1}{2}$ είναι:

$3 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^4 + \cdots$

Θα υπολογίσουμε και αυτό του $\frac{3}{8}$.

$8y_0 \equiv 1(mod5) \;\Rightarrow\; 3y_0 \equiv 1(mod5) \;\Rightarrow\; x_0 = 1$

$8y_1 \equiv 1(mod5^2) \;\Rightarrow\; 8(5k+2) \equiv 1(mod5^2) \;\Rightarrow\; 8 \cdot 5k \equiv -15(mod5^2) \;\Rightarrow$

$8k \equiv -3(mod5) \;\Rightarrow\; 3k \equiv -3(mod5) \;\Rightarrow\; k \equiv 4(mod5) \;\Rightarrow\; y_1 \equiv 22(mod5^2)$

$x_1 \equiv 3y_1 \equiv 3 \cdot 22 \equiv 16(mod5^2)$

$8y_2 \equiv 1(mod5^3) \;\Rightarrow\; 8(5^2k+22) \equiv 1(mod5^3) \;\Rightarrow\; 8 \cdot 5^2k \equiv -175(mod5^3)$

$8k \equiv -7(mod5) \;\Rightarrow\; k \equiv 1(mod5) \;\Rightarrow\; y_2 \equiv 47(mod5^3)$

$x_2 = 3y_2 \equiv 3 \cdot 47 \equiv 16(mod5^3)$

$8y_3 \equiv 1(mod5^4) \;\Rightarrow\; 8(5^3k+47) \equiv 1(mod5^4) \;\Rightarrow\; 8 \cdot 5^3k \equiv -3 \cdot 5^3(mod5^4) \;\Rightarrow$

$8k \equiv -3(mod5) \;\Rightarrow\; k \equiv 4(mod5) \;\Rightarrow\; y_3 = 547(mod5^4)$

$x_3 \equiv 3y_3 \equiv 3 \cdot 547 \equiv 391(mod5^4)$

$8y_4 \equiv 1(mod5^5) \;\Rightarrow\; 8(5^4k+547) \equiv 1(mod5^5) \;\Rightarrow\; 8 \cdot 5^4k \equiv$

$-7 \cdot 5^4(mod5^5) \;\Rightarrow$

$8k \equiv -7(mod5) \;\Rightarrow\; k \equiv 1(mod5) \;\Rightarrow\; y_4 \equiv 1172(mod5^5)$

$x_4 \equiv 3y_4 \equiv 3 \cdot 1172 \equiv 391(mod5^5)$

$(\bar{1},\ \bar{16},\ \bar{16},\ \bar{391},\ \bar{391}, \cdots)$

$a_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{5^n} \;\Rightarrow\; a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = 0, a_3 = 3, a_4 = 0$

$1 + 3 \cdot 5 + 0 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^4 + \cdots$

Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές στα αναπτύγματα παρουσιάζουν μία περιοδικότητα.

Άσκηση 3:

$|1|_p = |1 \cdot 1|_p = |1|_p|1|_p$

Αφού $|x|_p = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$, άρα $|1|_p \neq 0$ οπότε $(|1|_p)^2 = |1|_p \;\Rightarrow\; |1|_p = 1$

$|1|_p = |(-1)(-1)|_p = |-1|_p|-1|_p$. Άρα $(|-1|_p)^2 = 1$ και αφού $|x|_p \geq 0$ έπεται $|-1|_p = 1$

$|-a|_p = |(-1)a|_p = |-1|_p|a|_p = |a|_p \;\Rightarrow\; |-a|_p = |a|_p$

$|\frac{a}{b}|_p|b|_p = |\frac{a}{b}b|_p = |a|_p$.

Αφού $b \neq 0 \;\Rightarrow\; |b|_p \neq 0$, άρα μπορούμε να διαιρέσουμε κατά μέλη με $|b|_p$ οπότε $|\frac{a}{b}|_p = \frac{|a|_p}{|b|_p}$

Γενικά $|x+y|_p \leq max\{|x|_p, |y|_p\}$ άρα και $|x+y|_p \leq |x|_p + |y|_p$

έχουμε ότι $|a-b-a|_p \leq |a-b|_p + |-a|_p \;\Rightarrow\; |b|_p \leq |a-b|_p + |a|_p \quad (1)$

Επίσης $|a-b+b|_p \leq |a-b|_p + |b|_p \;\; \Rightarrow \;\; |a|_p \leq |a-b|_p + |b|_p \quad (2)$

$$\left.\begin{array}{l} (1) \quad \Rightarrow \quad -|a-b|_p \leq |a|_p - |b|_p \\ (2) \quad \Rightarrow \quad |a|_p - |b|_p \leq |a-b|_p \end{array}\right\} \Rightarrow \; -|a-b|_p \leq |a|_p - |b|_p \leq |a-b|_p$$

$\Rightarrow \quad ||a|_p - |b|_p| \leq |a-b|_p$

Αν $a_1 + a_2 + \cdot + a_n = 0 \;\; \Rightarrow \;\; a_1 + a_2 + \cdot + a_{n-1} = -a_n$

Αν για κανένα ζεύγος a_i, a_j με $i \neq j$ και $i, j \leq n-1$ δεν ισχύει

$|a_i|_p = |a_j|_p$ τότε $|a_1 + a_2 + \cdot + a_{n-1}|_p = max\{|a_1|_p + |a_2|_p + \cdot + |a_{n-1}|_p\}$

Η απόδειξη για δυο έγινε στο μάθημα. Η συγκεκριμένη σχέση αποδεικνύεται επαγωγικά.

Έστω $max\{|a_1|_p + |a_2|_p + \cdot + |a_{n-1}|_p\} = |a_k|_p, \quad 1 \leq k \leq n-1$ τότε

$|a_k|_p = |a_1 + a_2 + \cdot + a_{n-1}|_p = |-a_n|_p = |a_n|_p$

άρα $|a_k|_p = |a_n|_p$ με $k \leq n-1$ άρα βρήκαμε i, j με $i \neq j$ τ.ω. $|a_i|_p = |a_j|_p$

Άσκηση 4:

$\phi_p(x) = c^{c_p(x)}$ και αφού $0 < c < 1$ τότε $\phi_p(x) \geq 0$

$\phi_p(x) = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; w_p(x) = \infty \;\; \Leftrightarrow \;\; x = 0$. Άρα $\phi_p(x) = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \phi_p(xy) = c^{w_p(xy)} \\ \phi_p(x)\phi_p(y) = c^{w_p(x)}c^{w_p(y)} = c^{w_p(x)+w_p(y)} = c^{w_p(xy)} \end{array}\right\} \phi_p(xy) = \phi_p(x)\phi_p(y)$$

$\phi_p(x+y) = c^{w_p(x+y)}$. Όμως $w_p(x+y) \geq min\{w_p(x), w_p(y)\}$ και αφού $0 < c < 1$, ισχύει:

$c^{w_p(x+y)} \leq max\{c^{w_p(x)}, c^{w_p(y)}\} \;\; \Rightarrow \;\; \phi(x+y) \leq max\{\phi_p(x)\phi_p(y)\}$

Άρα η $\phi_p(x)$ είναι μία μη-τετριμμένη *norm* στο $\mathbb{Q}$ οπότε από το Θεώρημα *Ostrowski* έπεται ότι η $\phi_p(x)$ είναι ισοδύναμη με μία $p - norm$.

Άσκηση 5:

(*i*) $|x|_p = p^{-w_p(x)}$ με $p \in \mathbb{P}$ άρα $p \geq 2$ και $w_p(x) \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ άρα $|x|_p \geq 0$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Αν } |x|_p = 0 \;\; \Rightarrow \;\; w_p(x) = \infty \;\; \Rightarrow \;\; x = 0 \\ \text{Αν } x = 0 \;\; \Rightarrow \;\; w_p(x) = \infty \;\; \Rightarrow \;\; |x|_p = 0 \end{array}\right\} |x|_p = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; x = 0$$

(*ii*)
$$\left.\begin{array}{l} |xy|_p = p^{-w_p(xy)} \\ |x|_p|y|_p = p^{-w_p(x)}p^{-w_p(y)} = p^{-(w_p(x)+w_p(y))} = p^{-w_p(xy)} \end{array}\right\}. \text{ Επομένως}$$

$|xy|_p = |x|_p|y|_p$

(*iii*) $|x+y|_p = p^{-w_p(x+y)}$

Όμως $w_p(x+y) \geq min\{w_p(x), w_p(y)\} \;\; \Rightarrow$

$-w_p(x+y) \leq max\{-w_p(x), -w_p(y)\}$, άρα

$$p^{-w_p(x+y)} \leq max\{p^{-w_p(x)}, p^{-w_p(y)}\} \quad \Rightarrow |x+y|_p \leq max\{|x|_p, |y|_p\}$$

(iv) Αφού $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p \ | \ w_p(x) \geq 0\} \quad \Leftrightarrow$

$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p \ | \ p^{-w_p(x)} \leq 1\} \quad \Leftrightarrow$

$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p \ | \ |x|_p \leq 1\}$

(v) $\mathbb{Z}_p^* = \{x \in \mathbb{Q}_p \ | \ w_p(x) = 0\} \quad \Leftrightarrow$

$\mathbb{Z}_p^* = \{x \in \mathbb{Q}_p \ | \ p^{-w_p(x)} = 1\} \quad \Leftrightarrow$

$\mathbb{Z}_p^* = \{x \in \mathbb{Q}_p \ | \ |x|_p = 1\}$