**Θέματα Άλγεβρας, Αριθμητική Γεωμετρία**

**Λύσεις ασκήσεων Φυλλαδίου 4**

**Γιάννης Α. Αντωνιάδης**

**Άσκηση 1:**

1. $C: \ 3x^2 + 5y^2 + 7z^2 = 0$

   Εδώ $a = 3, b = 5, c = -7$. Άρα τα $a, b, c$ δεν είναι ομόσημα άρα έχει λύση στο $\mathbb{R}$.

   Επίσης από την απόδειξη του θεωρήματος - κριτηρίου ύπαρξης ρητών λύσεων της εξίσωσης $(C)$ έπεται ότι έχει λύση σε όλα τα $\mathbb{Q}_p$ για $p \neq 2, 3, 5, 7$

   Για $p = 3$ :

   $5 + x^2(-7) \equiv 0(mod3) \ \ \Rightarrow \ \ 2x^2 \equiv 1(mod3) \ \ \Rightarrow \ \ x^2 \equiv 2(mod3)$ δεν έχει λύση άρα η $(C)$ δεν έχει λύση στο $\mathbb{Q}_3$

   Για $p = 5$ :

   $3 + x^2(-7) \equiv 0(mod5) \ \ \Rightarrow \ \ 3x^2 \equiv 2(mod5) \ \ \Rightarrow \ \ x^2 \equiv 4(mod5)$ έχει λύση, άρα η $(C)$ έχει λύση στο $\mathbb{Q}_5$

   Για $p = 7$ :

   $3 + x^2 \cdot 5 \equiv 0(mod7) \ \ \Rightarrow \ \ 5x^2 \equiv 4(mod7) \ \ \Rightarrow \ \ x^2 \equiv 5(mod7)$ δεν έχει λύση, άρα η $(C)$ δεν έχει λύση στο $\mathbb{Q}_7$

   Για $p = 2$ : Υπάρχουν δύο από τους $a, b, c$ τ.ω. το άθροισμα τους να διαιρείται με 4 π.χ. $3 + 5 = 8$.

   Η τέταρτη συνθήκη του κριτηρίου ισχύει ως κενή πρόταση.

   Τελικά η $(C)$ δεν έχει λύση στο $\mathbb{Q}$ έχει όμως στο $\mathbb{R}$ και σε όλα τα $\mathbb{Q}_p$ για $p \neq 3, 7$.

2. $C: \ 5x^2 + 7y^2 - 3z^2 = 0$

   Τα $a, b, c$ δεν είναι ομόσημα άρα έχουμε λύση στο $\mathbb{R}$ επίσης πάλι θα έχει λύση σε όλα τα $\mathbb{Q}_p$ για $p \neq 2, 3, 5, 7$. Αυτά τα εξετάζουμε χωριστά.

   Για $p = 3$ : $\ 5 + x^2 7 \equiv 0(mod3) \ \ \Rightarrow \ \ x^2 \equiv 1(mod3)$ έχει λύση, άρα έχει λύση και στο $\mathbb{Q}_3$

   Για

   $p = 5$ : $\ 7 + x^2(-3) \equiv 0(mod5) \ \ \Rightarrow \ \ 2x^2 \equiv 3(mod5) \ \ \Rightarrow \ \ x^2 \equiv 4(mod5)$

έχει λύση, άρα έχουμε λύση και στο $\mathbb{Q}_5$

Για $p = 7: \;\; 5 + x^2(-3) \equiv 0(mod7) \;\; \Rightarrow \;\; 4x^2 \equiv 2(mod7) \;\; \Rightarrow$

$x^2 \equiv 4(mod7)$ έχει λύση, άρα έχει λύση και στο $\mathbb{Q}_7$.

Για $p = 2:$ Τα $a, b, c$ είναι όλα περιττά και $a + b \equiv 0(mod4)$.

Άρα η $(C)$ έχει λύση σε όλα τα $\mathbb{Q}_p \;\; \Rightarrow$ έχει λύση στο $\mathbb{Q}$.

Τρεις ρητές λύσεις της $(C)$ είναι: $(1, 1, 2), \;\; (10, 1, 13), \;\; (47, 17, 66)$

3. $C: \; 3x^2 + 7y^2 - 5z^2 = 0$

   $a = 3, b = 7, c = -5$. Τα $a, b, c$ δεν είναι ομόσημα άρα έχει λύση στο $\mathbb{R}$, όπως και σε όλα τα $\mathbb{Q}_p$ για $p \neq 2, 3, 5, 7$.

   Για $p = 3: \; 7 + x^2(-5) \equiv 0(mod3) \;\; \Rightarrow \;\; x^2 \equiv 2(mod3)$ δεν έχει λύση άρα η $(C)$ δεν έχει λύση στο $\mathbb{Q}_3$

   Για $p = 5: \; 3 + x^2 \cdot 7 \equiv 0(mod5) \;\; \Rightarrow \;\; 2x^2 \equiv 2(mod5) \;\; \Rightarrow \;\; x^2 \equiv 1(mod5)$ έχει λύση άρα η $(C)$ έχει λύση στο $\mathbb{Q}_5$

   Για $p = 7: \; 3 + x^2(-5) \equiv 0(mod7) \;\; \Rightarrow \;\; 2x^2 \equiv 4(mod7) \;\; \Rightarrow$

   $x^2 \equiv 2(mod7)$ έχει λύση το $x \equiv 3(mod7)$ και το $x \equiv 4(mod7)$ άρα η $(C)$ έχει λύση στο $\mathbb{Q}_7$

   Για $p = 2:$ Τα $a, b, c$ είναι όλα περιττά και

   $a + b = 10, \; a + c = -2, \; b + c = 2$ και κανένα δεν διαιρείται με 4 άρα δεν έχουμε λύση στο $\mathbb{Q}_2$.

   Επομένως, δεν έχει λύση για $p = 2, 3$ και συνεπώς ούτε και στο $\mathbb{Q}$.

4. $14x^2 - 15y^2 + 33z^2 = 0$. Θέτουμε όπου $x$ το $3x_1$ και έχουμε

   $14(3x_1)^2 - 15y^2 + 33z^2 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; 42x_1^2 - 5y^2 + 11z^2 = 0$

   Θεωρούμε την $C: \; 42x_1^2 - 5y^2 + 11z^2 = 0$

   $a = 42, \; b = -5 \; c = 11$. Τα $a, b, c$ δεν είναι ομόσημα άρα έχει λύση στο $\mathbb{R}$

   Προφανώς για $p \neq 2, 3, 5, 7, 11$ πάλι έχουμε λύση στο $\mathbb{Q}_p$.

   Για $p = 3: \; -5 + x^2 11 \equiv 0(mod3) \;\; \Rightarrow \;\; 2x^2 \equiv 2(mod3)$

   $\Rightarrow \;\; x^2 \equiv 1(mod3)$.

   Έχει λύση άρα η $(C)$ έχει λύση στο $\mathbb{Q}_3$.

   Για $p = 5: \; 42 + 11x^2 \equiv 0(mod5) \;\; \Rightarrow \;\; x^2 \equiv 3(mod5)$ δεν έχει λύση άρα η $(C)$ δεν έχει λύση στο $\mathbb{Q}_5$.

   Για $p = 7: \; -5 + 11x^2 \equiv 0(mod7) \;\; \Rightarrow \;\; 4x^2 \equiv 5(mod7)$

   $\Rightarrow \;\; x^2 \equiv 3(mod7)$ δεν έχει λύση άρα η $(C)$ δεν έχει λύση στο $\mathbb{Q}_7$

   Για $p = 11: \; 42 - 5x^2 \equiv 0(mod11) \;\; \Rightarrow \;\; 6x^2 \equiv 2(mod11)$

$\Rightarrow \quad x^2 \equiv 4(mod 11)$ έχει λύση, και συνεπώς και η $(C)$ έχει λύση στο $\mathbb{Q}_{11}$.

Για $p = 2:$ Τα $a, b, c$ δεν είναι όλα περιττά αφού $2|a$ άρα εξετάζουμε κατά πόσο ισχύουν οι $b + c \equiv 0(mod 8)$ ή $a + b + c \equiv 0(mod 8)$

$b + c = 6, \quad 6 \neq 0(mod 8)$

$a + b + c = 48 \quad 48 \equiv 0(mod 8)$

Άρα η $(C)$ έχει λύση στο $\mathbb{Q}_2$

Τελικά η αρχική εξίσωση δεν έχει λύση στο $\mathbb{Q}$ αλλά έχει στα $\mathbb{R}, \mathbb{Q}_p$ για $p \neq 5, 7$.