Θέματα Άλγεβρας, Αριθμητική Γεωμετρία

Λύσεις ασκήσεων Φυλλαδίου 5

Γιάννης Α. Αντωνιάδης

Άσκηση 1:

Έστω J ιδεώδες του $\mathbb{R}[X]$ με $I \subsetneq J$. Θα δείξουμε ότι $J = \mathbb{R}[X]$ άρα το $I =< x^2 + 1 >$ θα είναι $maximal$.

Ο $\mathbb{R}[X]$ είναι περιοχή κύριων ιδεωδών άρα θα υπάρχει $f(x)$ στον $\mathbb{R}[X]$ τ.ω. $J =< f(x) >$. Όμως $I \subsetneq J$ οπότε θα έχουμε ότι

$x^2 + 1 \in < f(x) > \;\Rightarrow\; \exists g(x) \in \mathbb{R}[X]$ τ.ω. $x^2 + 1 = f(x)g(x)$. Το $x^2 + 1$ όμως είναι ανάγωγο στον $\mathbb{R}[X]$ άρα είτε $f(x) = c(x^2 + 1)$ είτε $f(x) = c \neq 0$.

Αν $f(x) = c(x^2 + 1)$ τότε $J =< f(x) >=< c(x^2 + 1) >=< x^2 + 1 >= I$ όμως $I \subsetneq J$ άρα άτοπο.

Άρα $f(x) = c \;\Rightarrow\; J =< f(x) >=< c >= \mathbb{R}[X]$

Άσκηση 2:

Έστω ότι το $I =< 2, x >$ ήταν κύριο ιδεώδες του $\mathbb{Z}[X]$, τότε θα υπήρχε ένα $f(x) \in \mathbb{Z}[X]$ τέτοιο ώστε $< 2, x >=< f(x) >$. Αφού το 2 ανήκει στο αριστερό μέλος θα ανήκει και στο δεξί άρα $2 = f(x)g_1(x)$ για κάποιο $g_1(x) \in \mathbb{Z}[X]$.

$deg2 = degf(x) + degg_1(x) \;\Rightarrow\; 0 = degf(x) + degg_1(x) \;\Rightarrow\; degf(x) = 0$ και $degg_1(x) = 0$.

Τελικά $f(x) = c$ για κάποιο $c \in \mathbb{Z}$.

Τώρα $c \neq 0$ αφού $x \notin < 0 >$.

Όμοια $x = c \cdot g_2(x)$ για κάποιο $g_2(x) \in \mathbb{Z}[X]$.

$degx = degc + degg_2(x) \;\Rightarrow\; 1 = 0 + degg_2(x) \;\Rightarrow\; degg_2(x) = 1 \;\Rightarrow\; g_2(x) = ax + b$.

Οπότε $x = c(ax + b) \;\Rightarrow\; x = cax + cb \;\Rightarrow\; ca = 1 \;\Rightarrow\; c = \pm 1$, και $cb = 0 \;\overset{c\neq 0}{\Longrightarrow}\; b = 0$.

Όμως $< 1 >=< -1 >= \mathbb{Z}[X]$. Άρα τελικά πήραμε ότι $< 2, x >= \mathbb{Z}[X]$. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού τα στοιχεία του ιδεώδους $< 2, x >$ είναι τα πολυώνυμα των οποίων ο σταθερός όρος είναι άρτιος.

Άσκηση 3:

Έστω $f(X,Y) \in < X-1, Y+X^2-1 >$ τότε $\exists g_1(X,Y)$ και $g_2(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y]$

τ.ω.$f(X,Y) = (X-1)g_1(X,Y) + (Y+X^2-1)g_2(X,Y) =$

$(X-1)g_1(X,Y) + Yg_2(X,Y) + (X-1)(X+1)g_2(X,Y) =$

$(X-1)[g_1(X,Y) + (X+1)g_2(X,Y)] + Yg_2(X,Y)$

Άρα $f(X,Y) \in < X-1, Y > \Rightarrow \quad I \subseteq < X-1, Y >$

Έστω τώρα $f(X,Y) \in < X-1, Y >$.

Επομένως $\exists g_3(X,Y)$ και $g_4(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y]$ τ.ω.

$f(X,Y) = (X-1)g_3(X,Y) + Yg_4(X,Y) \;\; (1)$

$g_3(X,Y) = (X+1)g_4(X,Y) - (X+1)g_4(X,Y) + g_3(X,Y)$

Θέτουμε $g_5(X,Y) = g_3(X,Y) - (X+1)g_4(X,Y)$

Άρα $g_3(X,Y) = (X+1)g_4(X,Y) + g_5(X,Y) \;\; (2)$

Αντικαθιστούμε στην (1) την (2) οπότε έχουμε

$f(X,Y) = (X-1)[(X+1)g_4(X,Y) + g_5(X,Y)] + Yg_4(X,Y) \quad \Rightarrow$

$f(X,Y) = (X-1)g_5(X,T) + (Y+X^2-1)g_4(X,Y) \quad \Rightarrow$

$f(X,Y) \in < X-1, Y+X^2-1 >$.

Άρα $< X-1, Y > \subset I$.

Τελικά $I = < X-1, Y >$. Από γνωστή πρόταση: Σε αλγεβρικά κλειστό σώμα K τα *maximal* ιδεώδη του $K[X,Y]$ είναι τα $M = < X-a_1, Y-a_2 >$.

Αφού το $\mathbb{C}$ είναι αλγεβρικά κλειστό και το I είναι της μορφής

$< X-a_1, Y-a_2 > \Rightarrow$ Το I είναι *maximal*.

Άσκηση 4:

Αφού το $\mathbb{C}$ είναι αλγεβρικά κλειστό από το *Nullstellesatz* έχουμε

$Rad(I) = I(V(I))$

$V(I) = V(< X^5, Y^3 >) = V(\{X^5, Y^3\}) = \{(0,0)\}$

$I(\{(0,0)\}) = \{f(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y] \mid f(0,0) = 0\}$

$= \{Xg(X,Y) + yh(X,Y) \parallel g,h \in \mathbb{C}[X,Y]\} = < X, Y >$

Όντως $I(\{(0,0)\}) = < X, Y >$ διότι έστω $f(X,Y) \in I(\{(0,0)\})$, $\;f(X,Y) \neq 0$.

Τότε Αν: $deg_X f(X,Y) = 0 \;\Rightarrow\; f(X,Y) = f_1(Y)$. Όμως

$f(0,0) = 0 \;\Rightarrow\; f_1(0) = 0 \;\Rightarrow\; f_1(Y) = Yf_2(Y)$ άρα $f(X,Y) \in < X, Y >$

Αν: $deg_X f(X,Y) \geq 1$ τότε $f(X,Y) = Xf_1(X,Y) + f_2(Y)$

(από ευκλείδεια διαίρεση) Όμως

$f(0,0) = 0 \;\Rightarrow\; 0 = 0f_1(0,0) + f_2(0) \;\Rightarrow\; f_2(0) = 0 \;\Rightarrow\; f_2(Y) = Yf_3(Y)$

Άρα $f(X,Y) = xf_1(X,Y) + Yf_3(Y)$ οπότε πάλι $f(X,Y) \in < X,Y >$.
Όμοια παίρνοντας περιπτώσεις για τους βαθμούς ως προς Y το
$f(X,Y) \in < X,Y >$.
Άρα σε κάθε περίπτωση $f(X,Y) \in < X,Y > \;\Rightarrow\; I(\{(0,0)\}) \subseteq < X,Y >$.
Αντίστροφα τώρα αν $f(X,Y) \in < X,Y >$ προφανώς $f(X,Y) \in I(\{(0,0)\})$ άρα
$< X,Y > \subset I(\{(0,0)\})$.
Τελικά δείξαμε $I(\{(0,0)\}) =< X,Y >$ και αφού
$Rad(I) = I(\{(0,0)\}) \;\Rightarrow\; Rad(I) =< X,Y >$

Άσκηση 5:

(i) Προφανώς $\{(t,t^2,t^3) \mid t \in \mathbb{C}\} \subseteq V(Y - X^2, Z - X^3)$
Αν $(X,Y,Z) \in V(Y - X^2, Z - X^3)$ τότε $(X,Y,Z) \in \{(t,t^2,t^3) \mid t \in \mathbb{C}\}$.
Άρα $V(Y - X^2, Z - X^3) = \{(t,t^2,t^3) \mid t \in \mathbb{C}\}$

(ii) Προφανώς $< Y - X^2, Z - X^3 > \subseteq I(V(Y - X^2, Z - X^3))$.
Το $I(V(Y - X^2, Z - X^3))$
$= \{f(X,Y,Z) \in \mathbb{C}[X,Y,Z] \mid f(t,t^2,t^3) = 0, \text{για κάθε } t \in \mathbb{C}\}$.
Θεωρούμε το πολυώνυμο $f(X,Y,Z) \in (\mathbb{C}[X,Z])[Y]$, ως πολυώνυμο του Y.
Επειδή το $Y - X^2$ είναι πρώτου βαθμού ως προς Y, το $f(X,Y,Z)$ γράφεται:
$f(X,Y,Z) = q(X,Y,Z)(Y - X^2) + r(X,Z)$.
Ομοίως το $r(X,Z)$ γράφεται: $r(X,Z) = q'(X,Z)(Z - X^3) + r'(X)$.
Επομένως, $f(X,Y,Z) = (X,Y,Z)(Y - X^2) + q'(X,Z)(-Z - X^3) + r'(X)$.
Επειδή ισχύει $f(t,t^2,t^3) = 0$, για κάθε $t \in \mathbb{C}$, έπεται ότι $r'(t) = 0$ για κάθε
$t \in \mathbb{C}$.
Επομένως $r'(t) \equiv 0$, οπότε $f \in < Y - X^2, Z - X^3 >$, δηλαδή
$I(V(Y - X^2, Z - X^3)) =< Y - X^2, Z - X^3 >$.

(iii) Θεωρούμε τη συνάρτηση ϕ, $\begin{cases} \phi : \mathbb{C}[X,Y,Z] \;\rightarrow\; \mathbb{C}[t] \\ f(X,Y,Z) \longmapsto f(t,t^2,t^3) \end{cases}$
Η ϕ είναι ομομορφισμός δακτυλίων αφού
$\phi(f+g) = (f+g)(t,t^2,t^3) = f(t,t^2,t^3) + g(t,t^2,t^3) = \phi(f) + \phi(g)$
$\phi(f \cdot g) = (f \cdot g)(t,t^2,t^3) = f(t,t^2,t^3)g(t,t^2,t^3)$
Η ϕ είναι επιμορφισμός. Έστω $f(t) \in \mathbb{C}[t]$. Αν $f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$
τότε θεωρούμε το πολυώνυμο $g(X,Y,Z) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$
Προφανώς $\phi(g) = f$ άρα ϕ επί

$ker\phi = \{f \in \mathbb{C}[X,Y,Z] \mid f(t,t^2,t^3) = 0\} = I(\{(t,t^2,t^3) \mid t \in \mathbb{C}\})$
$\overset{(ii)}{=} < Y - X^2, Z - X^3 >$

Άρα από 1^o θεώρημα ισομορφισμών:

${}^{\mathbb{C}[X,Y,Z]}/_{ker f\phi} \cong Im\phi \;\; \Rightarrow \;\; {}^{\mathbb{C}[X,Y,Z]}/_{<y-x^2,z-x^3>} \cong \mathbb{C}[t]$

Αλλά $\mathbb{C}[t]$ ακέραια περιοχή άρα $< y - x^2, z - x^3 >$ πρώτο ιδεώδες και συνεπώς, $V(< y - x^2, z - x^3 >)$ ανάγωγο.