Εξετάσεις, Εισαγωγή στην Αριθμητική Γεωμετρία

Χειμερινό του 2014-2015

2 Φεβρουαρίου του 2015

Καθηγητής Ιωάννης Α. Αντωνιάδης

1 Να λυθεί η διοφαντική εξίσωση

$$X^2 + 2Y^2 = Z^2, \quad (X, Y, Z) = 1$$

στο σύνολο των μη-αρνητικών ακεραίων.

2 Να αποδείξετε ότι $\sqrt{1-p} \in \mathbb{Q}_p$ για κάθε πρώτο p, $p/neq2$. Πότε το

$$\sqrt{1-m} \in \mathbb{Q}_2, \quad m \in \mathbb{N}?$$

Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο

$$F(X) = (X^2 - 13)(X^2 - 17)(X^2 - 221) \in \mathbb{Z}[X]$$

έχει ρίζα $modp$, για κάθε πρώτο p, αλλά δεν έχει ρίζα στο$\mathbb{Z}[X]$

3 Να εξετάσετε για ποιους πρώτους p η εξίσωση

$$18X^2 + 28Y^2 - 7Z^2 = 0$$

έχει λύση στο σώμα $\mathbb{Q}_p$, $p \in \mathbb{P}$. Έχει η εξίσωση, μη-τετριμμένη, ρητή λύση;, Αν ναι, να υπολογιστεί το σύνολο των ρητών λύσεων της.

4 Να υπολογιστούν τα σημεία τομής των καμπύλων

$$F(X, Y, Z) = YZ - X^2 + Z^2 = 0$$

και

$$G(X,Y,Z) = 3YZ + Y^2 + 2Z^2 - X^2 = 0$$

στον $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ και η πολλαπλότητα τομής αυτών.

5 Δίνεται η αλγεβρική καμπύλη

$$ZY^2 = X^3 + 3XZ.$$

Είναι η καμπύλη ελλειπτική; Αν ναι, να υπολογιστεί η ομάδα των ρητών σημείων πεπερασμένης τάξης $E(\mathbb{Q})_{tor}$ αυτής. Στη συνέχεια να ελεγχθεί αν η $E(\mathbb{Q})$ είναι πεπερασμένη ή άπειρη.

6 Ας είναι $E/\mathbb{F}_p Y^2 = X^3 + aX$ μια ελλειπτική καμπύλη και $p \in \mathbb{P}$ τέτοιος ώστε p δεν διαιρεί την διακρίνουσα $\Delta(E)$ και $p \geq 7, \quad p \equiv 3(mod 4)$. Να αποδειχθεί ότι η τάξη της $E(\mathbb{F}_p) = p + 1$.