ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Εργαστήριο Φυσικής ΙΙΙ - Οπτική

Πέτρος Ρακιτζής

Τμήμα Φυσικής

2. Μελετη Διαθλασης Φωτος απο Πρισμα

1. Σκοπός

- Μελέτη ιδιοτήτων πρίσματος
- Μελέτη της μεταβολής του δείκτη διάθλασης συναρτήσει του μήκους κύματος.
- Προσδιορισμός διασκεδαστικής ικανότητας πρίσματος.

2. Θεωρία

Βασική προαπαιτούμενη γνώση
Serway, Physics for Scientists & Engineers, Τόμος III, Κεφ. 35.3, 35.4, 35.5, 35.6, 35.7, 35.8 (συμπεριλαμβανομένων των αντίστοιχων παραδειγμάτων και προβλημάτων).

2.1 Δείκτης Διάθλασης – Νόμος του Snell – Διασπορά

Η ταχύτητα διάδοσης του φωτός σε ένα μέσο διαφέρει από υλικό σε υλικό. Ορίζουμε ως *δείκτη διάθλασης*, n, τον λόγο του μέτρου της ταχύτητας του φωτός στο κενό προς το μέτρο της ταχύτητας του φωτός στο μέσο.

Όταν μονοχρωματικό φως περνά από την διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ δύο διαφανών ισοτροπικών μέσων σε σταθερή θερμοκρασία, τότε ένα μέρος της αρχικής ακτίνας ανακλάται και ένα άλλο μέρος *διαθλάται* μέσα στο δεύτερο μέσο. Η *διαθλώμενη* ακτίνα δεν συνεχίζει την πορεία της προσπίπτουσας ακτίνας (που σχηματίζει γωνία i με την κάθετο στην διαχωριστική επιφάνεια των δύο μέσων), αλλά σχηματίζει γωνία r με την κάθετο στην διαχωριστική επιφάνεια των δύο μέσων. Σύμφωνα με τον *νόμο του Snell*, ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_r \tag{1}$$

όπου n_1, n_2 οι δείκτες διάθλασης, χαρακτηριστικοί των δύο μέσων.

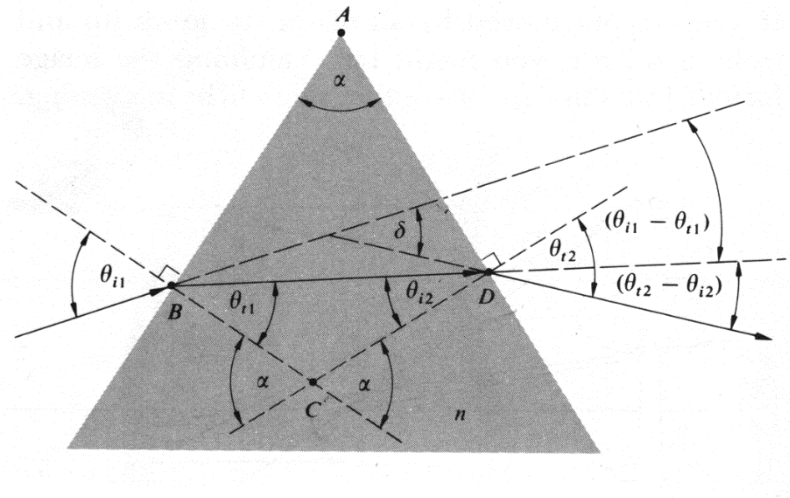
Ο δείκτης διάθλασης εξαρτάται από το μήκος κύματος, λ, του προσπίπτοντος φωτός, και είναι πραγματικός αριθμός, για τις φασματικές περιοχές μακριά από τις περιοχές απορρόφησης του υλικού. Το φαινόμενο της εξάρτησης του n από το λ λέγεται *διασπορά* ή *διασκεδασμός*.

2.2 Πρίσματα Διασποράς

Τα πρίσματα έχουν πολλούς διαφορετικούς ρόλους στην Οπτική. Υπάρχουν π.χ. συνδυασμοί πρισμάτων που χρησιμεύουν ως διαχωριστές δέσμης (beam-splitters), ως πολωτικές συσκευές, και ως συμβολόμετρα. Συνήθως όμως τα πρίσματα χρησιμοποιούνται είτε ως στοιχεία διασποράς σε φασματοσκόπια, είτε για να αλλάζουν τον προσανατολισμό μιας εικόνας ή την διεύθυνση διάδοσης μιας φωτεινής δέσμης. Εδώ θα μελετήσουμε τη χρήση πρισμάτων διασποράς, δηλ. πρισμάτων που προκαλούν ανάλυση του προσπίπτοντος φωτός.

Γωνία εκτροπής, γωνία ελάχιστης εκτροπής

Έστω μονοχρωματική φωτεινή ακτίνα μήκους κύματος λ που προσπίπτει σε πρίσμα διασποράς υπό γωνία θ_{i1} (βλ. Σχήμα 1).



Σχήμα 1 : Γεωμετρία πρίσματος διασποράς

Η φωτεινή ακτίνα εξέρχεται από το πρίσμα σχηματίζοντας "γωνία απόκλισης", δ, με την αρχική κατεύθυνση. Στην πρώτη διαχωριστική επιφάνεια συμβαίνει διάθλαση και η ακτίνα εκτρέπεται κατά γωνία θ_{i1} - θ_{t1} και στην δεύτερη διαχωριστική επιφάνεια, η ακτίνα εκτρέπεται κατά θ_{t2} - θ_{i2}. Συνολικά η **γωνιακή απόκλιση ή εκτροπή** είναι

$$\delta = \left(\theta_{i1} - \theta_{t1}\right) + \left(\theta_{t2} - \theta_{i2}\right) \qquad (2)$$

Εφόσον το πολύγωνο ABCD περιέχει δύο ορθές γωνίες, η γωνία BCD πρέπει να είναι παραπληρωματική της διαθλαστικής γωνίας, α, του πρίσματος. Ως εξωτερική γωνία του τριγώνου BCD, η γωνία α είναι επίσης ίση με το άθροισμα των απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου, δηλ.

$$\alpha = \theta_{t1} + \theta_{i2} \qquad (3)$$

Συνεπώς

$$\delta = \theta_{i1} + \theta_{t2} - \alpha \qquad (4)$$

Αν ο δείκτης διάθλασης του πρίσματος είναι *n* και το πρίσμα βρίσκεται στον αέρα $n_\alpha \approx 1$, τότε, από τον Νόμο του Snell (στην 2η διαχωριστική επιφάνεια) προκύπτει ότι

$$\sin\theta_{t2} = n\sin\theta_{i2} = n\sin\left(\alpha - \theta_{t1}\right) = n\left(\sin\alpha\cos\theta_{t1} - \cos\alpha\sin\theta_{t1}\right) \qquad (5\alpha)$$

Εφαρμόζοντας τον Νόμο του Snell στην πρώτη διαχωριστική επιφάνεια δηλαδή

$$\sin\theta_{i1} = n\sin\theta_{t1} \qquad (5\beta)$$

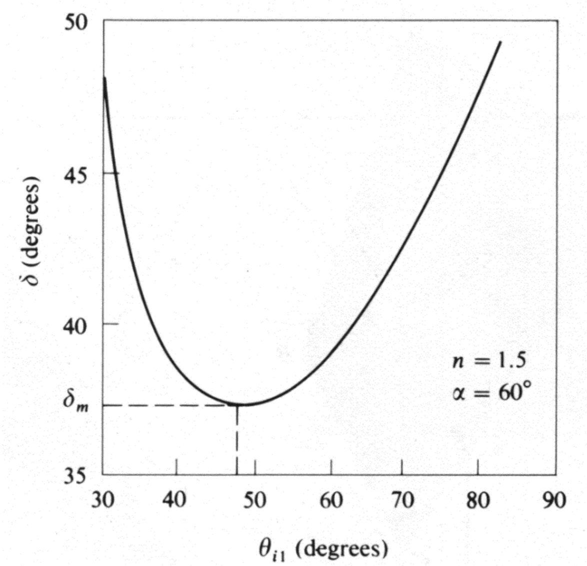
Και αντικαθιστώντας το $\cos\theta_{t1}$ με $\left(1-\sin^2\theta_{t1}\right)^{1/2}$ και το $\sin\theta_{t1}$ από την (5β) στην (5α) και λύνοντας ως προς θ_{t2} έχουμε

$$\theta_{t2} = \sin^{-1}\left[\sin\alpha\left(n^2 - \sin^2\theta_{i1}\right)^{1/2} - \cos\alpha\sin\theta_{i1}\right] \qquad (6)$$

Τότε, σύμφωνα με την (4) η γωνιακή εκτροπή δ δίνεται σαν συνάρτηση της γωνίας πρόσπτωσης θ_{i1} από τον τύπο:

$$\delta = \delta(\theta_{i1}) = \theta_{i1} + \sin^{-1}\left[\sin\alpha\left(n^2 - \sin^2\theta_{i1}\right)^{1/2} - \cos\alpha\sin\theta_{i1}\right] - \alpha \qquad (7)$$

Προφανώς η δ αυξάνεται αυξανομένου του n, που με τη σειρά του είναι συνάρτηση του μήκους κύματος, συνεπώς μπορούμε να γράψουμε την γωνία εκτροπής ως δ(n) ή δ(λ). Στα περισσότερα διαφανή διηλεκτρικά υλικά που έχουν πρακτική εφαρμογή, το n(λ) ελαττώνεται αυξανομένου του μήκους κύματος στην ορατή περιοχή του οπτικού φάσματος. Συνεπώς, η γωνιακή εκτροπή θα είναι μικρότερη για το κόκκινο φως, απ' ότι είναι για το ιώδες. Για μονοχρωματική ακτινοβολία (δεδομένο λ) και δεδομένο πρίσμα (δεδομένα n και α) η γωνιακή εκτροπή εξαρτάται μόνο από την γωνία πρόσπτωσης θi1. Στο Σχήμα 2 φαίνεται η εξάρτηση της δ από την γωνία πρόσπτωσης για ένα συνηθισμένο πρίσμα υάλου.



Σχήμα 2: Γωνιακή εκτροπή συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης

Η ελάχιστη δυνατή τιμή της γωνιακής εκτροπής έχει ιδιαίτερη σημασία για πρακτικούς σκοπούς. Η τιμή της μπορεί να βρεθεί είτε παραγωγίζοντας στη σχέση (7) το δ ως προς θ_{i1}, και θέτοντας $d\delta/d\theta_{i1} = 0$, είτε ακολουθώντας την εξής απλούστερη μέθοδο:

Παραγωγίζοντας την σχέση (4) ως προς θ_{i1} και απαιτώντας $d\delta/d\theta_{i1} = 0$, παίρνουμε

$$\frac{d\delta}{d\theta_{i1}} = 1 + \frac{d\theta_{t2}}{d\theta_{i1}} = 0 \Rightarrow \frac{d\theta_{t2}}{d\theta_{i1}} = -1$$

Εν συνεχεία, παραγωγίζουμε τον νόμο Snell σε κάθε διαχωριστική επιφάνεια και παίρνουμε

$$\cos\theta_{i1} d\theta_{i1} = n\cos\theta_{t1} d\theta_{t1}$$
$$\cos\theta_{t2} d\theta_{t2} = n\cos\theta_{i2} d\theta_{i2}$$

Διαφορίζοντας τώρα την εξ. (3) για σταθερό α, προκύπτει ότι $d\theta_{t1} = -\, d\theta_{i2}$. Από τα παραπάνω συνεπάγεται (διαιρόντας κατά μέλη) ότι

$$\frac{\cos\theta_{i1}}{\cos\theta_{t2}} = \frac{\cos\theta_{t1}}{\cos\theta_{i2}}$$

Χρησιμοποιώντας και πάλι τον νόμο του Snell, μπορούμε να ξαναγράψουμε την παραπάνω σχέση ως

$$\frac{1-\sin^2\theta_{i1}}{1-\sin^2\theta_{t2}} = \frac{n^2-\sin^2\theta_{i1}}{n^2-\sin^2\theta_{t2}}$$

Αυτή η σχέση ισχύει για την τιμή της γωνίας πρόσπτωσης για την οποία $d\delta/d\theta_{i1} = 0$. Εφόσον $n \neq 1$, συμπεραίνουμε ότι $\theta_{i1} = \theta_{t2}$, και επομένως $\theta_{t1} = \theta_{i2}$.

Αυτό σημαίνει ότι μια ακτίνα εκτρέπεται το ελάχιστο δυνατό (δ_m), όταν η ακτίνα *μέσα* στο πρίσμα είναι παράλληλη προς την βάση του. Από τα παραπάνω, είναι προφανές ότι όταν $\delta=\delta_m$, $\theta_{i1} = (\delta_m + \alpha)/2$ και $\theta_{t1} = \alpha/2$, οπότε από τον νόμο του Snell στην πρώτη διαχωριστική επιφάνεια προκύπτει ότι

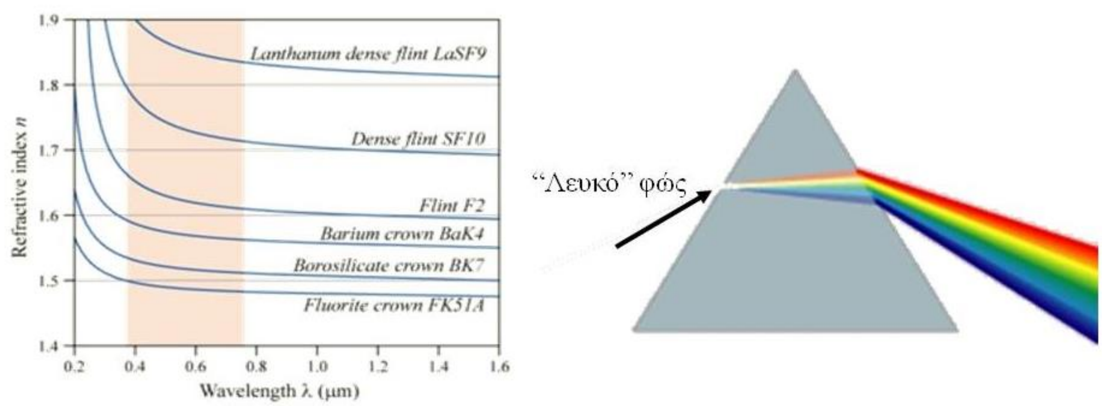
$$n = \sin\left(\frac{\delta_m+\alpha}{2}\right) \Big/ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tag{8}$$

Αυτή η εξίσωση αποτελεί τη βάση μιας από τις πλέον ακριβείς τεχνικές προσδιορισμού του συντελεστή διάθλασης διαφανούς υλικού. Αυτή την τεχνική θα χρησιμοποιήσουμε στο πείραμα που ακολουθεί.

Διασπορά - Σχέση Cauchy

Η ελάχιστη εκτροπή μονοχρωματικής δέσμης κατά τη διέλευσή της από πρίσμα δίνεται από τη σχέση (8), ως συνάρτηση του δείκτη διάθλασης n. Ο δείκτης διάθλασης ωστόσο, εξαρτάται από το μήκος κύματος (n_λ), συνεπώς η εκτροπή είναι και αυτή συνάρτηση του μήκους κύματος.

Στο Σχήμα 3 παρουσιάζονται μερικές τυπικές “ομαλές” καμπύλες διασποράς για διάφορα είδη γυαλιού, και ο συνεπαγόμενος διαχωρισμός χρωμάτων.



Σχήμα 3: Παραδείγματα ομαλής καμπύλης διασποράς και ο συνεπαγόμενος διαχωρισμός μηκών κύματος λευκού φωτός που περνά από το πρίσμα.

Συγκρίνοντας το Σχήμα 3 και Σχήμα 1, παρατηρήστε ότι στα μικρότερα μήκη κύματος αντιστοιχούν μεγαλύτεροι δείκτες διάθλασης του υλικού και συνεπώς μικρότερες ταχύτητες διάδοσης στο πρίσμα.

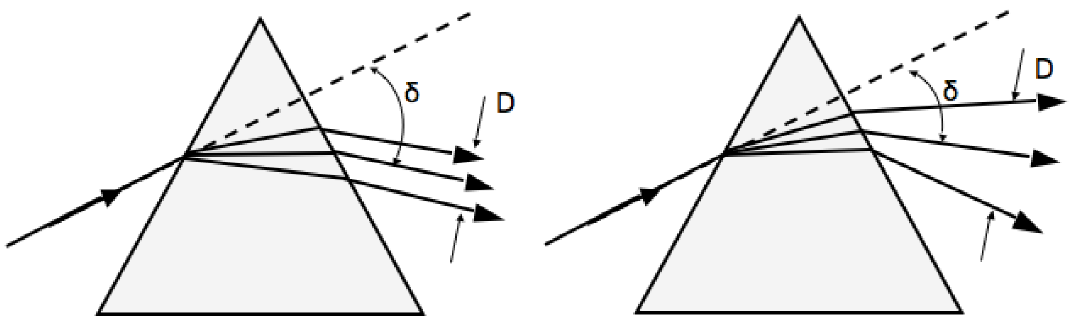
Η καμπύλες διασποράς που δίνονται στο Σχήμα 3 ονομάζονται «ομαλές». Όταν το διαφανές μέσο έχει χαρακτηριστικές διεγέρσεις που απορροφούν φωτόνια σε μήκη κύματος εντός της περιοχής μηκών κύματος της καμπύλης διασποράς, τότε η καμπύλη είναι και πάλι μονοτονικά φθίνουσα όπως φαίνεται στο σχήμα, αλλά αλλάζει μορφή (αποκτά θετική κλίση) στην περιοχή της απορρόφησης. Όταν συμβαίνει αυτό χρησιμοποιείται ο όρος «ανώμαλη διασπορά». Στην περιοχή απορρόφησης, ο δείκτης διάθλασης περιγράφεται από μιγαδικό αριθμό, του οποίου το πραγματικό μέρος αντιστοιχεί στο γνωστό δείκτη διάθλασης και το φανταστικό χαρακτηρίζει την απορρόφηση ακτινοβολίας από το υλικό. Η ομαλή καμπύλη διασποράς που φαίνεται στο σχήμα είναι τυπική, αν και διαφοροποιείται κάπως από υλικό σε υλικό. Υπάρχει μια εμπειρική σχέση που προσεγγίζει την καμπύλη αυτή, *η σχέση Cauchy*:

$$n_\lambda = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \ldots \tag{9}$$

όπου A, B, C, … είναι εμπειρικές σταθερές που προσδιορίζονται από τα πειραματικά δεδομένα για ένα συγκεκριμένο υλικό. Συνήθως χρησιμοποιούνται μόνο οι δύο πρώτοι όροι του αναπτύγματος. Τότε, η *διασπορά* (D), που ορίζεται ως dn/dλ, δίνεται κατά προσέγγιση, από τη σχέση

$$D = \frac{dn_\lambda}{d\lambda} = -\frac{2B}{\lambda^3} \tag{10}$$

Είναι σημαντικό να κατανοήσουμε την διαφορά μεταξύ διασποράς και εκτροπής. Μπορεί πρίσμα από υλικό με μεγάλο n να προκαλέσει μεγάλη εκτροπή σε δεδομένο μήκος κύματος, χωρίς ο διαχωρισμός μεταξύ γειτονικών μηκών κύματος να είναι μεγάλος (βλ. Σχήμα 4).



Σχήμα 4: Οριακές περιπτώσεις μεγάλης γωνιακής εκτροπής δ (της ενδιάμεσης γραμμής) και μικρής διασποράς D (αριστερό σχήμα), και μικρής γωνιακής εκτροπής δ και μεγάλης διασποράς D (δεξιό σχήμα).

Ιστορικά, συνηθίζεται να χαρακτηρίζουμε τη διασπορά χρησιμοποιώντας τρία μήκη κύματος, στο μέσο και στις άκρες του ορατού φάσματος, τις λεγόμενες γραμμές Fraunhofer οι οποίες αντιστοιχούν σε εκπομπή φωτονίων λόγω συγκεκριμένων μεταπτώσεων ηλεκτρονίων στο άτομο του υδρογόνου και αζώτου. Αυτές βρίσκονται σε μήκη κύματος λ_F=484.1nm, λ_C=656.3nm, και λ_D=589.3nm, και αντιστοιχούν στις γραμμές H_β, H_α και N_α.

Χρησιμοποιώντας ένα λεπτό πρίσμα σε θέση ελάχιστης εκτροπής (λ_D) για την γραμμή D του Νατρίου, για παράδειγμα, βρίσκουμε ότι, ο λόγος της γωνιακής απόκλισης των μηκών κύματος F και C ως προς την εκτροπή του μήκους κύματος D, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4, είναι ίσος προς

$$\Delta = \frac{D}{\delta} = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1} \tag{11}$$

Αυτή η ποσότητα, που συσχετίζει τη διασπορά με την εκτροπή ενός πρίσματος, ονομάζεται *διασκεδαστική ικανότητα*. Το αντίστροφο της διασκεδαστικής ικανότητας, **γ**, είναι γνωστό ως *αριθμός Abbe*, και κείται γενικά στην περιοχή 20<γ<100.

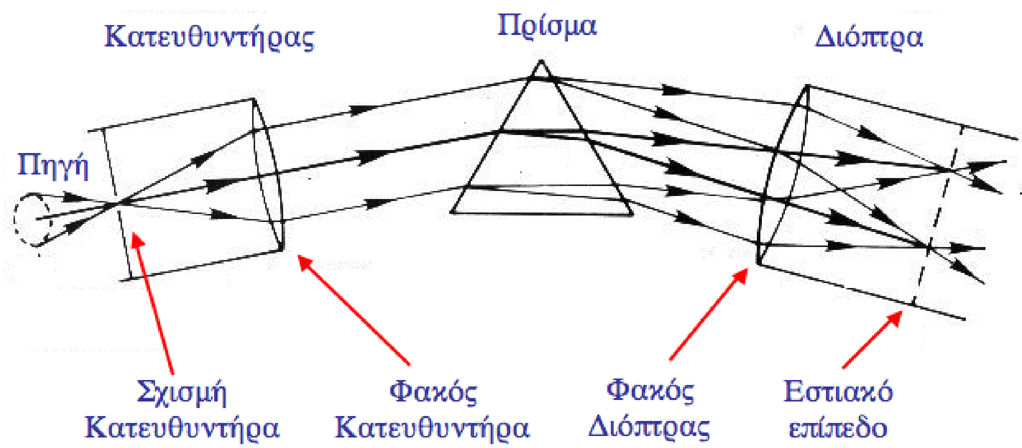
Επιλεγμένοι δείκτες διάθλασης για λ=589 nm (μια πιο πλήρη λίστα δίνεται στο List of refractive indices)

Υλικό	*n*
Αέρια σε 0 °C και 1 atm	
Αέρας	1.000293
Ηλιο (He)	1.000036
Υδρογόνο (H)	1.000132
Διοξείδιο του Ανθρακος (CO_2)	1.00045
Υγρά σε 20 °C	
Νερό (H_2O)	1.333
Εθανόλη	1.36
Βενζίνη	1.501
Στερεά	
Πάγος	1.309
Fused silica	1.46
PMMA (Plexiglas)	1.49
Crown glass (typical)	1.52
Flint glass (typical)	1.62
Διαμάντι	2.42

Φασματοσκόπιο πρίσματος

Ένα όργανο ανάλυσης φάσματος που χρησιμοποιεί ένα πρίσμα ως στοιχείο διασποράς, λέγεται φασματοσκόπιο. Η αρχή λειτουργίας των φασματοσκοπίων με πρίσμα φαίνεται στο Σχήμα 5.

Μία παράλληλη φωτεινή δέσμη αναλύεται περνώντας μέσα από πρίσμα και εν συνεχεία φακός εστιάζει τις παράλληλες ακτίνες και σχηματίζει το φάσμα. Για την δημιουργία της παράλληλης δέσμης χρησιμοποιείται ο *κατευθυντήρας*, ο οποίος αποτελείται από σωλήνα που έχει σχισμή στο ένα άκρο και συγκλίνοντα φακό $Φ_1$ στο άλλο και σε απόσταση ίση προς την εστιακή του απόσταση. Εάν η σχισμή είναι λεπτή και η φωτεινή πηγή είναι μονοχρωματική, όλες οι παράλληλες ακτίνες εισερχόμενες στο πρίσμα θα διαθλαστούν αλλά θα εξακολουθήσουν να είναι παράλληλες. Κατά την έξοδό τους από το πρίσμα θα υποστούν ξανά διάθλαση εξακολουθώντας να είναι παράλληλες, και συνεπώς ο δεύτερος φακός $Φ_2$, θα δημιουργήσει στο εστιακό του επίπεδο πραγματικό είδωλο της σχισμής του κατευθυντήρα, δηλαδή μια φωτεινή γραμμή (φασματική γραμμή). Το πλάτος της φωτεινής γραμμής ρυθμίζεται μεταβάλλοντας το πλάτος της σχισμής εισόδου. Η παρατήρηση του ειδώλου γίνεται με μεγεθυντικό φακό. Ο φακός $Φ_2$ και ο μεγεθυντικός φακός είναι στερεωμένοι στα άκρα σωλήνα και αποτελούν την *διόπτρα παρατήρησης* του οργάνου.



Σχήμα 5: Σχηματική απεικόνιση φασματοσκόπιου με πρίσμα.

Εάν το φως της πηγής δεν είναι μονοχρωματικό, τότε οι ακτίνες κάθε μήκους κύματος εξερχόμενες από το πρίσμα θα δημιουργούν, όπως και προηγουμένως, παράλληλες δέσμες, αλλά με διαφορετικές διευθύνσεις. Οι προκύπτουσες έγχρωμες γραμμές αποτελούν το φάσμα της εξεταζόμενης φωτεινής πηγής. Επειδή συνήθως τα φάσματα είναι εκτεταμένα πέρα από το οπτικό πεδίο της διόπτρας, αυτή μπορεί να στρέφεται, ώστε να διερευνάται κατά περιοχές ολόκληρο το φάσμα.

Όταν αντί της διόπτρας χρησιμοποιηθεί ένα όργανο καταγραφής του φάσματος (ψηφιακή κάμερα CCD, καταγραφικό, φωτογραφική πλάκα), το όργανο ονομάζεται φασματογράφος.

Ο τύπος του γυαλιού από το οποίο είναι κατασκευασμένο το πρίσμα και οι φακοί καθορίζει την περιοχή μηκών κύματος στην οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο φασματογράφος.

Για να μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο φασματογράφος π.χ. στο υπεριώδες, χρειάζονται πρίσματα π.χ. από χαλαζία (SiO_2) ή από CaF_2. Για το υπέρυθρο, χρησιμοποιούνται πρίσματα από NaCl, KCl και Al_2O_3.

Διακριτική ικανότητα φασματοσκόπιου πρίσματος

Η διακριτική ικανότητα ενός φασματογράφου, δηλαδή η ικανότητά του να διακρίνει δύο γειτονικά μήκη κύματος, είναι προφανώς μια πολύ σημαντική παράμετρος. Οι παρατηρούμενες φασματικές γραμμές είναι στην ουσία είδωλα της σχισμής εισόδου. Λόγω περίθλασης, το πλάτος του ειδώλου της σχισμής δεν μπορεί να ελαττωθεί πέραν ενός σημείου, όσο και να ελαττώσουμε το πλάτος της σχισμής εισόδου. Το διακριτικό όριο του φασματογράφου αντιστοιχεί στην ελάχιστη διαφορά μήκους κύματος Δλ, την οποία πρέπει να έχουν δύο γειτονικές φασματικές γραμμές για να διακρίνονται μεταξύ τους.

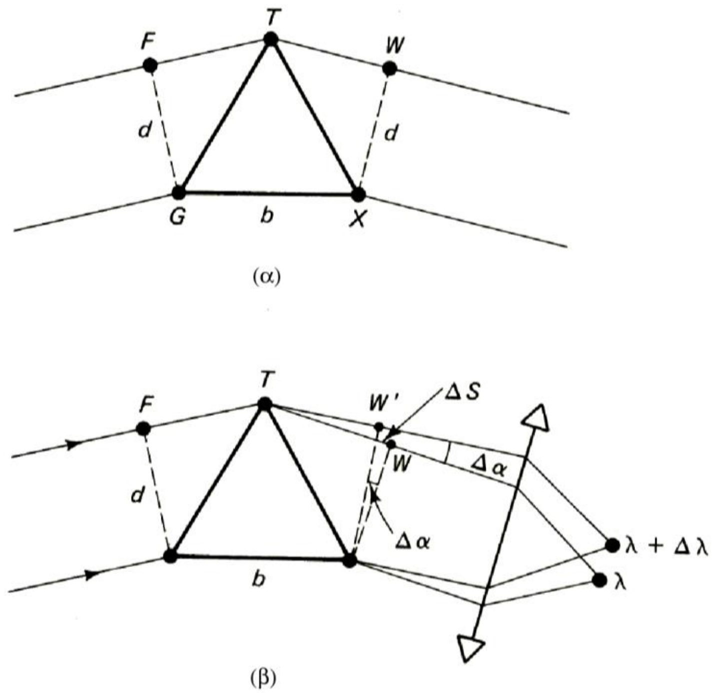
Ας θεωρήσουμε (Σχήμα 6) μια μονοχρωματική παράλληλη δέσμη φωτός μήκους κύματος λ, που προσπίπτει σε πρίσμα, καλύπτοντας εντελώς την πλευρά στην οποία προσπίπτει.

Από την αρχή του Fermat, είναι προφανές ότι η ακτίνα FTW είναι ισόχρονη με την ακτίνα GX, εφόσον ξεκινούν και καταλήγουν στα ίδια κυματικά μέτωπα, GF και XW, αντίστοιχα. Επομένως, οι οπτικοί δρόμοι μπορούν να εξισωθούν, δίνοντας

$$FT + TW = nb \tag{12}$$

όπου b είναι το μήκος της βάσης του πρίσματος και *n* ο δείκτης διάθλασης του υλικού του πρίσματος για το συγκεκριμένο μήκος κύματος, λ.

Έστω ότι η προσπίπτουσα δέσμη δεν είναι μονοχρωματική, αλλά εμπεριέχει άλλο ένα γειτονικό μήκος κύματος λ', με $\lambda' - \lambda = \Delta\lambda$. Στο μήκος κύματος λ' αντιστοιχεί ένας διαφορετικός δείκτης διάθλασης $n' = n - \Delta n$.



Σχήμα 6: Διαγράμματα που χρησιμοποιούνται στην εύρεση της διακριτικής ικανότητας πρίσματος : (α) διάθλαση από πρίσμα για μονοχρωματικό φως, (β) διάθλαση από πρίσμα γιά δύο γειτονικά μήκη κύματος που απέχουν μεταξύ τους κατά Δλ.

Για “ομαλή” διασπορά, το Δn θα είναι μικρή θετική ποσότητα. Έτσι, τα δύο εξερχόμενα κυματικά μέτωπα θα έχουν μια μικρή γωνιακή απόσταση $\Delta\alpha$ μεταξύ τους και επομένως θα εστιαστούν σε διαφορετικά σημεία στο εστιακό επίπεδο της διόπτρας. Από την αρχή του Fermat (για το λ΄), παίρνουμε ότι

$$FT + TW - \Delta S = (n - \Delta n)b \tag{13}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (12) & (13) προκύπτει ότι

$$\Delta \mathrm{S} = \mathrm{b}\Delta \mathrm{n} \Rightarrow \Delta \mathrm{S} = \mathrm{b}\frac{\mathrm{dn}}{\mathrm{d}\lambda}\Delta\lambda$$

Η γωνιακή απόσταση $\Delta\alpha$ είναι ίση προς ΔS/d , όπου d το πλάτος της δέσμης. Συνεπώς,

$$\Delta\alpha = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{d}}\left(\frac{\mathrm{dn}}{\mathrm{d}\lambda}\right)\Delta\lambda \tag{14}$$

Σύμφωνα με το κριτήριο Rayleigh (βλ. Κεφ. Περίθλασης), η ελάχιστη γωνιακή απόσταση $\Delta\alpha$ μεταξύ των δύο κυματικών μετώπων, ώστε τα σχηματιζόμενα είδωλα μόλις να διακρίνονται μεταξύ τους, δίνεται από την σχέση

$$\Delta\alpha_{\min} = \frac{\lambda}{\mathrm{d}} \tag{15}$$

Από τις εξισώσεις (14) και (15) προκύπτει ότι η ελάχιστη απόσταση μεταξύ γειτονικών μηκών κύματος, ώστε τα αντίστοιχα είδωλα μόλις να διακρίνονται μεταξύ τους, είναι

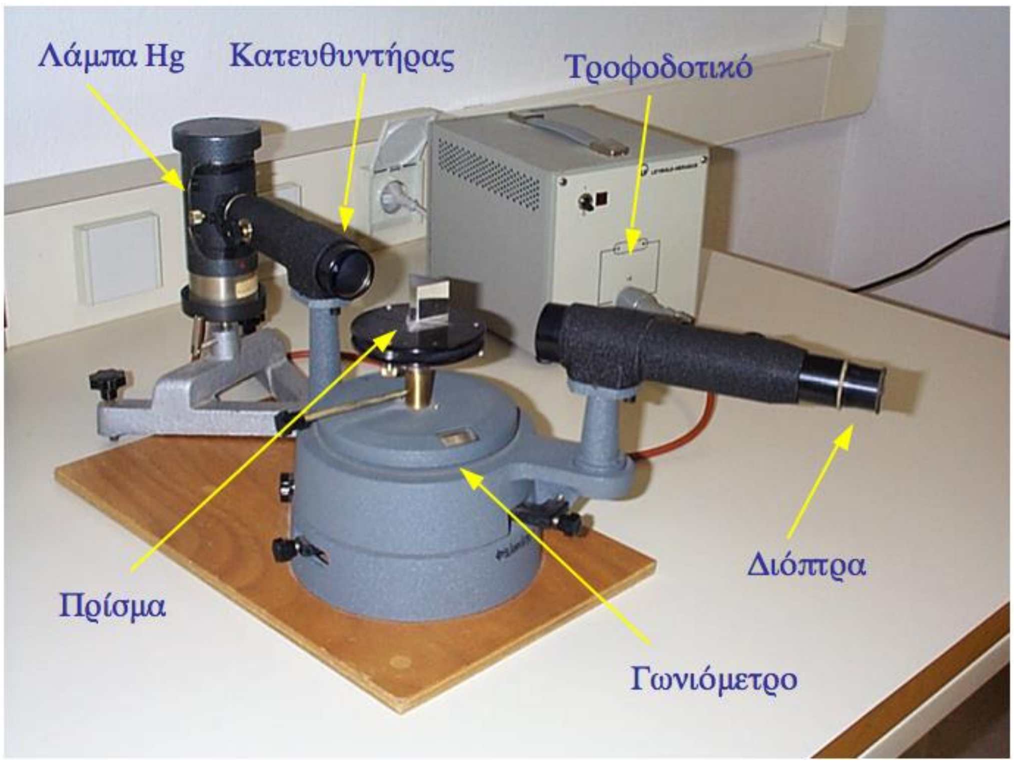
$$(\Delta\alpha)_{\min} = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{d}}\left(\frac{\mathrm{dn}}{\mathrm{d}\lambda}\right)(\Delta\lambda)_{\min} \Rightarrow (\Delta\lambda)_{\min} = \frac{\lambda}{b\left(\frac{\mathrm{dn}}{\mathrm{d}\lambda}\right)}$$

Συνεπώς, *η διακριτική ικανότητα του πρίσματος*, θα δίνεται από τον τύπο

$$R = \frac{\lambda}{(\Delta\lambda)_{\min}} = b\frac{dn}{d\lambda} \tag{16}$$

3. Περιγραφή της πειραματικής διάταξης

Για την μελέτη του πρίσματος χρησιμοποιούμε γωνιόμετρο και λυχνία ατμών υδραργύρου. Η πειραματική διάταξη φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 7: Πειραματική διάταξη αποτελούμενη από το γωνιόμετρο με την τράπεζα και το πρίσμα, την διόπτρα, τον κατευθυντήρα, και την λάμπα υδραργύρου με το αντίστοιχο τροφοδοτικό.

Το γωνιόμετρο αποτελείται από τον κατευθυντήρα, την διόπτρα και τον δίσκο όπου τοποθετείται το πρίσμα που μελετάται κάθε φορά.

Για να μετρηθούν με ακρίβεια οι διάφορες γωνίες πρέπει απαραιτήτως η φωτεινή πηγή να παράγει δέσμη όσο γίνεται λιγότερο αποκλίνουσα. Με την σωστή ρύθμιση του φακού του κατευθυντήρα είναι δυνατόν η δέσμη που εξέρχεται να είναι παράλληλη. Από την θεωρία της οπτικής, η διόπτρα οφείλει να είναι ρυθμισμένη στο άπειρο (δηλ. να σχηματίζει το είδωλο της σχισμής ευκρινώς σε μεγάλη απόσταση.

Ο δίσκος περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα.

Το γωνιόμετρο που πρόκειται να χρησιμοποιήσετε επιτρέπει την μέτρηση γωνιών με ακρίβεια της τάξης ενός πρώτου λεπτού της μοίρας. Ωστόσο, αυτό επιτυγχάνεται μετά από προσεκτικές και διαδοχικές μηχανικές και οπτικές ρυθμίσεις.

4. Εκτέλεση του πειράματος

4.1 Ρύθμιση του οργάνου

Μηχανικές ρυθμίσεις
Το επίπεδο του δίσκου στο γωνιόμετρο πρέπει να είναι παράλληλο πρός το επίπεδο που ορίζουν οι άξονες του κατευθυντήρα και της διόπτρας.

Παρατηρήστε ότι ο άξονας περιστροφής του δίσκου είναι κάθετος προς το βάθρο του οργάνου. Αυτό σημαίνει ότι ρυθμίζοντας κατάλληλα τους τρεις κοχλίες που συνδέουν το δίσκο με τον άξονα θα επιτύχετε και την ζητούμενη παραλληλία.

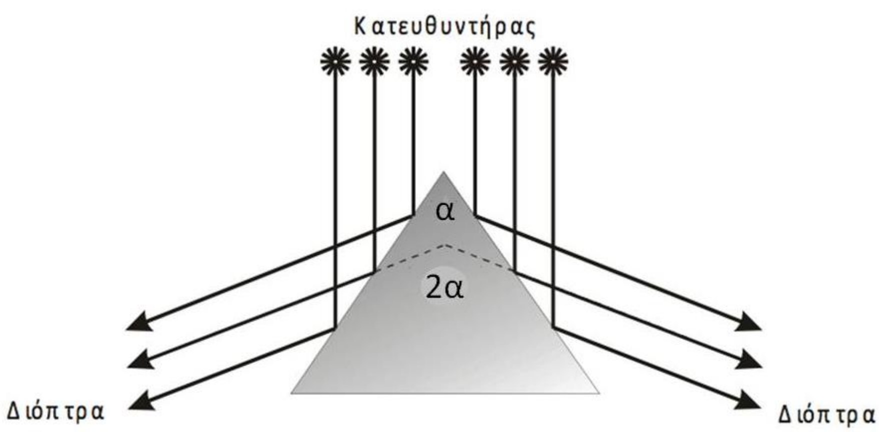
Οπτικές ρυθμίσεις
Τοποθετήστε την λάμπα υδραργύρου στην οπτική τράπεζα και τροφοδοτήστε την.

Ρυθμίστε με τον κοχλία την διόπτρα στο άπειρο. Βεβαιωθείτε ότι βλέπετε το σταυρόνημα ευκρινώς (σε αυτή τη ρύθμιση το σταυρόνημα που παρατηρείτε βρίσκεται στην εστία του αντικειμενικού φακού).

4.2 Μέτρηση της γωνίας του πρίσματος

Πειραματική Διαδικασία
Τοποθετήστε το πρίσμα στον δίσκο όπως στο σχήμα 8. Σημειώστε την γωνία κατά την οποία πρέπει να στραφεί η διόπτρα ώστε να παρατηρήσετε διαδοχικά τα δύο λευκά είδωλα (από ανάκλαση). Αυτή η γωνία είναι διπλάσια από αυτή του πρίσματος (βλέπε σχήμα 8).

Εξηγείστε, γιατί.



Σχήμα 8: Μέτρηση της γωνίας του πρίσματος α

Υπόδειξη 1: Οι μετρήσεις αυτές γίνονται με φαρδιά δέσμη (ρυθμίστε το άνοιγμα της σχισμής εισόδου) φωτός, τόσο φαρδιά ώστε να μοιράζεται και στις δύο πλευρές του πρίσματος όπως φαίνεται στο σχήμα 8.

Υπόδειξη 2: Για ευκολία παρατήρησης των μικρών και λεπτών γραμμών του βερνιέρου για την ακριβή μέτρηση των γωνιών χρησιμοποιείστε μεγενθυτικό φακό ή φωτογραφίστε με το κινητό σας τον βερνιέρο υπό μεγέθυνση (zoom).

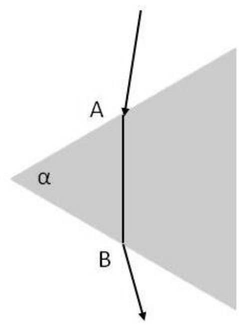
Ζητούμενα

- Υπολογίστε την γωνία $\alpha = (2\alpha)/2$ του πρίσματος (Σχήμα 8).
- Επαναλάβετε τη διαδικασία μερικές φορές, και βρείτε την μέση τιμή και το αντίστοιχο σφάλμα.

4.3 Μέτρηση της γωνίας ελάχιστης απόκλισης

***Πειραματική Διαδικασία*:**

1. Τοποθετήστε το πρίσμα στον δίσκο σύμφωνα με το Σχήμα 9.



Σχήμα 9: Τοποθέτηση του πρίσματος (σε κάτοψη) για την μέτρηση της γωνίας ελάχιστης απόκλισης

Λόγω διάθλασης η δέσμη εξέρχεται από το πρίσμα υπό γωνία ως προς την βάση του. Είναι σημαντικό να ρυθμίσετε το άνοιγμα της σχισμής εισόδου του κατευθυντήρα ώστε η δέσμη που θα παρατηρήσετε να μην έχει εκτυφλωτική ένταση. Αναζητήστε την έξοδο από το πρίσμα του Σχήματος 9 (προσέχοντας να ρυθμίσετε το άνοιγμα της σχισμής) και διαπιστώστε ότι δεν είναι πλέον μία λευκή δέσμη, αλλά πολλές κατακόρυφες γραμμές διαφορετικού χρώματος. Το φάσμα που παίρνετε δείχνει ότι η απόκλιση μεταβάλλεται με το μήκος κύματος.

2. Ελαττώστε **αργά** την γωνία πρόσπτωσης περιστρέφοντας το δίσκο. Παρακολουθείτε την κίνηση του δίσκου με την διόπτρα. Παρατηρείστε ότι το είδωλο στρέφεται όπως και το πρίσμα, στην συνέχεια σταματάει και τέλος κινείται αντίθετα από τον δίσκο, που εξακολουθεί βεβαίως να κινείται με την αρχική φορά. Η θέση όπου το είδωλο μένει σταθερό (αλλαγή φοράς), αντιστοιχεί στην ελάχιστη απόκλιση της εξερχόμενης δέσμης (γωνία δ_m) ως προς την εισερχόμενη (στο πρίσμα).

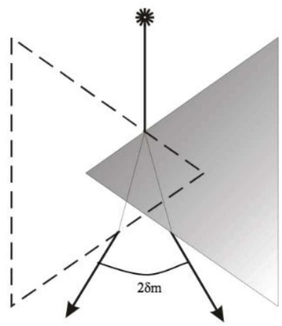
   Καταγράψτε τις θέσεις ελάχιστης απόκλισης για τις διάφορες γραμμές του ατόμου του υδραργύρου.

   Υπόδειξη: Σύμφωνα με την θεωρία που αναπτύχθηκε στην αρχή του κεφαλαίου στην γωνία ελαχιστης απόκλισης δ_m ισχύει $\theta_{i1} = \theta_{t2}$ και $\theta_{i2} = \theta_{t1}$ οπότε στην θέση αυτή η δέσμη μέσα στο πρίσμα (Σχήμα 9 AB - όχι έξω από το πρίσμα!) διαπερνά το πρίσμα με κατεύθυνση παράλληλη προς την βάση του. Και αυτό ισχύει για όλα τα μήκη κύματος λ, οπότε η θέση αυτή είναι ανεξάρτητη του λ.

   Αποδείξτε ότι όντως η AB είναι παράλληλη προς την βάση στην θέση αυτή.

3. Τοποθετήστε το πρίσμα συμμετρικά ως προς την αρχική θέση. Το Σχήμα 10 δείχνει την νέα θέση του πρίσματος με την συνεχή γραμμή, ενώ την αρχική με διακεκομμένη. Εντοπίστε τις νέες θέσεις ελάχιστης απόκλισης. Από τις δύο θέσεις ελάχιστης απόκλισης βρείτε για κάθε γραμμή την γωνία $2\delta_m$.

4. Μετρήστε το μήκος της βάσης του πρίσματος



Σχήμα 10: Οι δύο συμμετρικές θέσεις του πρίσματος για την μέτρηση της γωνίας **2δ$_m$**.

Οι μετρήσεις να γίνονται με προσοχή.

Ελέγξτε ότι πήρατε όλες τις μετρήσεις που απαιτούνται από το πείραμα.

Πριν αρχίσετε να κάνετε την επεξεργασία των δεδομένων, βεβαιωθείτε ότι η λυχνία είναι σβησμένη και όλα τα όργανα που χρησιμοποιήσατε είναι εκτός τροφοδοσίας.

Ζητούμενα

1. Με τα πειραματικά δεδομένα για την λάμπα υδραργύρου συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

$\lambda_{θεωρ}$ (nm)	**404.66**	**435.84**	**546.08**	**579.07**
θέση (pixel)				
$1/\lambda^2$				
δ_m				
$\left(\frac{\alpha+\delta_m}{2}\right)$				
$\sin\left(\frac{\alpha+\delta_m}{2}\right)$				
$\sin(\alpha/2)$				
n				
Δn^*				

2. Βρείτε τις τιμές των σταθερών Α και Β της σχέσης (9) (κρατώντας τους δύο πρώτους όρους του αναπτύγματος). Να υπολογισθεί το σφάλμα στον προσδιορισμό των σταθερών αυτών.
3. Βρείτε τον αριθμό Abbe του πρίσματος που χρησιμοποιήσατε (να υπολογισθεί και το αντίστοιχο σφάλμα) και ελέγξετε εάν κείται στην αναμενόμενη περιοχή τιμών.
4. Χρησιμοποιώντας τις μετρήσεις σας για την διασπορά του πρίσματος και για το μήκος της βάσης του πρίσματος, υπολογίστε την διακριτική ικανότητά του, για λ=546,1nm

Βιβλιογραφία

* Να αποδειχθεί ο τύπος που δίνει το σχετικό σφάλμα στην μέτρηση του n είναι: $\Delta n/n = (\Delta\alpha/2)/\tan(\alpha/2)$.

- F.L. Pedrotti & L.S. Pedrotti, Introduction to Optics, Prentice Hall International Editions, 1993, ch. 6-2
- E. Hecht, Optics, Addison-Wesley Publishing Company, 1987, ch. 5.5
- Κ.Δ. Αλεξοπούλου, Οπτκή, παράγραφοι 19, 66-69, 117
- Feynman, Lectures on Physics, vol. I, II, κεφ. 26, 31 (τομ I), κεφ. 33 (τομ. II)
- Halliday-Resnick, Φυσική, τομ. II, παράγραφοι 41.1, 41.6
- Μαθήματα Φυσικής Πανεπιστημίου Berkeley, τομ. 3 (Κυματική), παράγραφος 4.3

Σημειώματα

Σημείωμα αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.