Αλγεβρα I

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

Χειμερινὸ ἑξάμηνο 2015-2016

Βασικὴ περιγραφὴ τῶν θεμάτων ποὺ συζητήθηκαν τὴ 2^{η} ἑβδομάδα

(Δὲν πρόκειται γιὰ λεπτομερῆ περιγραφή.)

- **Μέγιστος Κοινὸς Διαιρέτης (ΜΚΔ)**.

- **Θεώρημα 1.** *Ἔστω $a, b \in \mathbb{Z}$, ὄχι καὶ οἱ δύο 0. Θεωροῦμε τὸ σύνολο*

$$M = \{ax + by \mid x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

Ἰσχύουν τὰ ἑξῆς:

1. *Ἂν $m_1, m_2 \in M$ τότε καὶ $m_1 + m_2 \in M$. Ἂν $m \in M$ καὶ $c \in \mathbb{Z}$ τότε $cm \in M$.*

2. *Ὑπάρχουν θετικοὶ ἀκέραιοι μέσα στὸ M καὶ ἔστω d ὁ ἐλάχιστος θετικὸς ἀκέραιος τοῦ M. Τότε $M = d\mathbb{Z}$, δηλαδή, τὸ M ἀποτελεῖται, ἀκριβῶς, ἀπὸ ὅλα τὰ πολλαπλάσια τοῦ d.*

3. *Ὁ παραπάνω d εἶναι* ΜΚΔ *τῶν a, b. Ἐπιπλέον, ὑπάρχουν $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ τέτοιοι ὥστε $d = ax_0 + by_0$.*

- **Εὐκλείδειος Ἀλγόριθμος**.

- **Πρόταση 2.** *Ἂν ὁ p εἶναι πρῶτος καὶ a ὁποιοσδήποτε ἀκέραιος, τότε, ἢ $p|a$ ἢ $(p, a) = 1$.*

- **Θεώρημα 3.**

1. *Ἂν $a|bc$ καὶ $(a, b) = 1$, τότε $a|c$.*

2. *Ἔστω ὅτι ὁ p εἶναι πρῶτος. Ἂν $p|ab$ τότε $p|a$ εἴτε $p|b$.*
   Γενίκευση: Ἂν $p|a_1 \cdots a_n$, τότε ὁ p διαιρεῖ ἕναν τουλάχιστον a_i.

3. *Ἂν $p|a^n$, τότε $p|a$.*

• **Θεώρημα 4.** (Θεμελιῶδες Θεώρημα τῆς Ἀριθμητικῆς) *Κάθε ἀκέραιος $a > 1$ ἀναλύεται κατὰ μοναδικὸ τρόπο σὲ γινόμενο πρώτων παραγόντων. Μὲ «μοναδικότητα τῆς ἀνάλυσης» ἐννοοῦμε τὸ ἑξῆς: Ἂν $a = p_1 \cdots p_m$ καὶ $a = q_1 \cdots q_m$ εἶναι δύο ἀναλύσεις τοῦ a σὲ γινόμενο πρώτων, τότε, ὑποχρεωτικά, $m = n$ καί, μὲ κατάλληλη ἀναδιάταξη καὶ ἀρίθμηση τῶν πρώτων τῆς δεύτερης ἀνάλυσης, ἔχομε $q_i = p_i$ γιὰ $i = 1, \ldots, n$.*

• **Κανονικὴ ἀνάλυση σὲ πρώτους**. Ἂν κάνομε τὴν ἀνάλυση σὲ πρώτους ἑνὸς ἀκεραίου $a > 1$ καὶ ὕστερα μαζέψομε τοὺς ἴσους πρώτους, τότε ἡ ἀνάλυση θὰ πάρει τὴν ἑξῆς μορφή:

$$a = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}, \quad n_i \geq 1 \ (i = 1, \ldots, k)$$

ὅπου οἱ πρῶτοι $p_1, \ldots, p_k$ εἶναι διαφορετικοὶ μεταξύ τους. Ἡ παραπάνω ἀνάλυση τοῦ a λέγεται *κανονικὴ ἀνάλυση τοῦ a (σὲ πρώτους)*.

• **Πρόταση 5.**

1. *Ἔστω ὅτι $a|b$ καὶ ὁ πρῶτος p ἐμφανίζεται στὴν κανονικὴ ἀνάλυση τοῦ a μὲ ἐκθέτη n. Τότε, εἴτε $p \nmid a$, εἴτε $p|a$ καὶ ὁ ἐκθέτης τοῦ p στὴν κανονικὴ ἀνάλυση τοῦ a εἶναι $\leq n$.*

2. *Ἔστω $b = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$ ἡ κανονικὴ ἀνάλυση τοῦ b σὲ πρώτους. Τότε, τὸ σύνολο τῶν θετικῶν διαιρετῶν τοῦ b εἶναι τὸ ἑξῆς:*

$$\Delta = \{p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k} \mid 0 \leq r_i \leq n_i, \ i = 1, \ldots, k\}.$$

• **Πρόταση 6.** *Ἂν $(a, b) = d$, τότε $(a/b \,,\, b/d) = 1$.*

Ἀναφορὲς

[1] Δ. Βάρσος, Δ. Δεριζιώτης, Γ. Εμμανουήλ, Μ. Μαλιάκας, Ο. Ταλέλλη, *Μια Εισαγωγή στην Άλγεβρα*, Γ΄ έκδοση, Εκδόσεις ΣΟΦΙΑ, Αθήνα 2012.