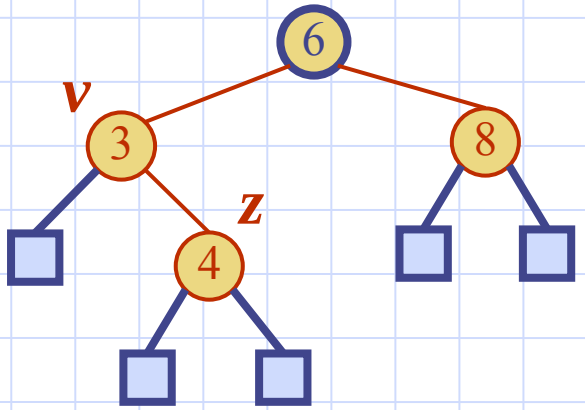
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Αλγόριθμοι και πολυπλοκότητα

Μελανέρυθρα δεντρα

Ιωάννης Τόλλης
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

Μελανέρυθρα δεντρα

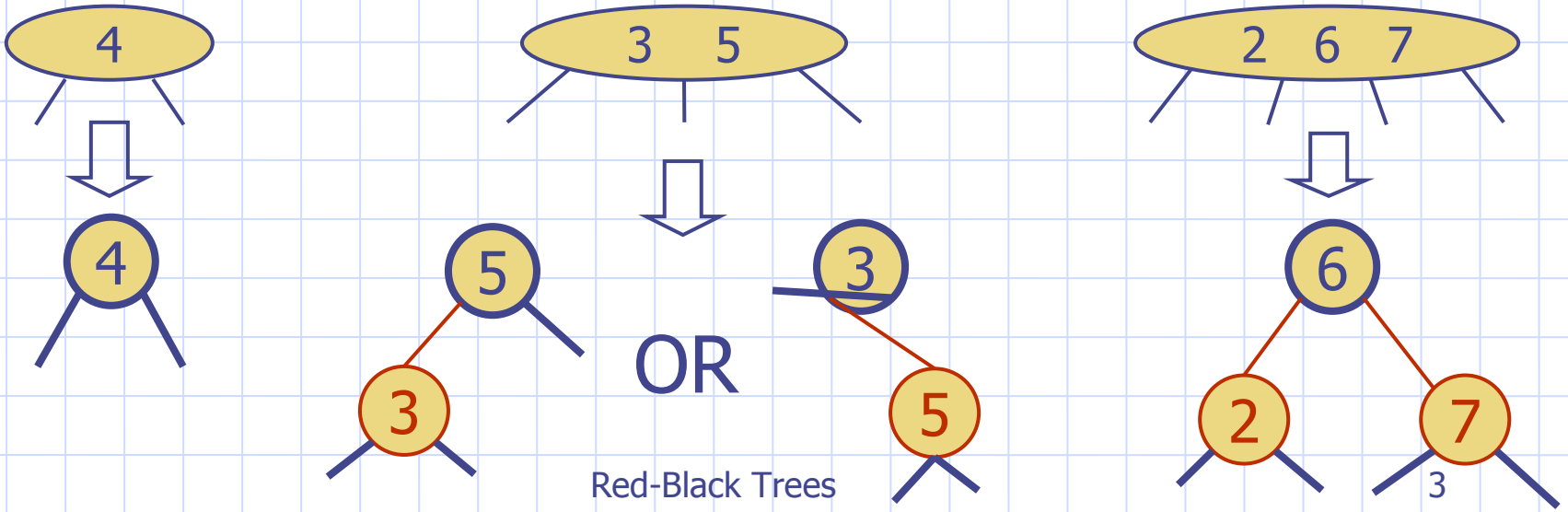


Περιγραφή και Διαβασμα

- Από τα δεντρα (2,4)στα μελανέρυθρα δέντρα
- Μελανέρυθρα δέντρα
  - Ορισμός
  - Ύψος
  - Εισαγωγή
    - Αναδόμηση
    - Αναχρωματισμός
  - Διαγραφή
    - Αναδόμηση
    - Αναχρωματισμός
    - Προσαρμογή

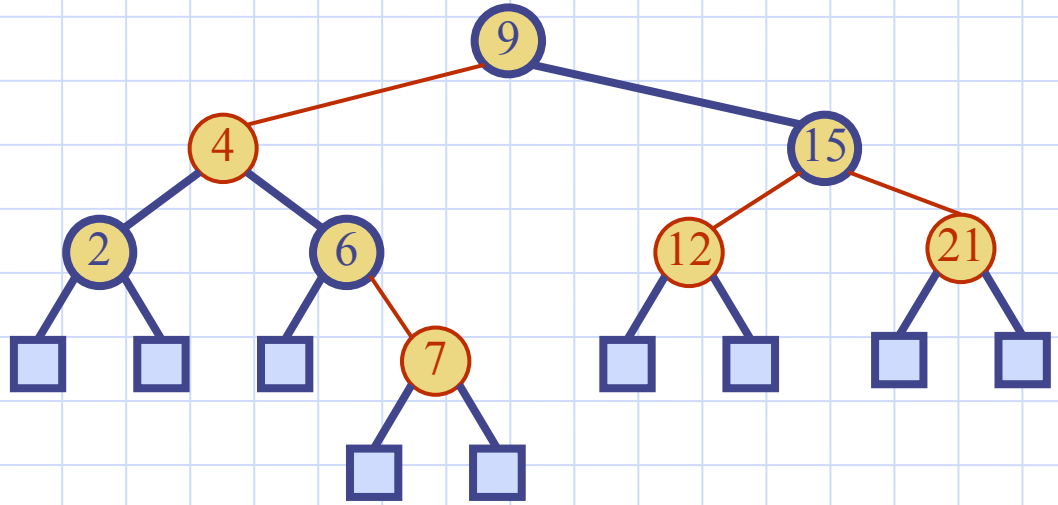
Από τα δέντρα(2,4) στα μελανέρυθρα δέντρα

- Ένα μελανέρυθρο δέντρο είναι μια αναπαράσταση ενός (2,4) δέντρου ως ένα δυαδικό δέντρο του οποίου οι κόμβοι είναι κόκκινοι ή **μαύροι**
- Συγκριτικά με το αντίστοιχο δέντρο (2,4) ένα μελανέρυθρο δέντρο έχει
  - Την ίδια απόδοση λογαριθμικού χρόνου
  - Απλούστερη υλοποίηση με κόμβους ενός τύπου



Μελανέρυθρο δέντρο

- Ένα μελανέρυθρο δέντρο μπορεί να οριστεί επίσης σαν ένα δυαδικό δέντρο αναζήτησης που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες
  - Ιδιότητα Ρίζας: Η ρίζα είναι μαύρη
  - Εξωτερική Ιδιότητα: Κάθε φύλλο είναι μαύρο
  - Εσωτερική Ιδιότητα: Τα παιδιά ενός κόοκκινου κόμβου είναι μάυρα
  - Ιδιότητα Βάθους: Όλα τα φύλλα έχουν το ίδιο μαύρο βάθος



Ύψος ενός μελανέρυθρου δέντρου

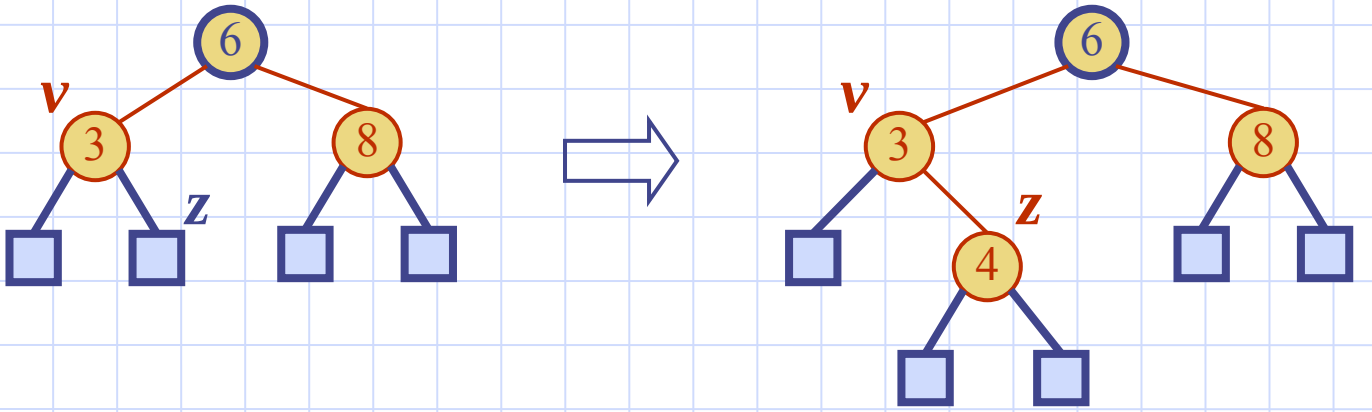
- Θεώρημα: Ένα μελανέρυθρο δέντρο με n στοιχεία έχει ύψος $O(\log n)$

  Απόδειξη:

  - Το ύψος ενός μελανέρυθρου δέντρου είναι το πολύ διπλάσιο του αντίστοιχού του δέντρου (2,4), που είναι $O(\log n)$
- Ο αλγόριθμος αναζήτησης ενός δυαδικού δέντρου αναζήτησης είναι είναι ίδιος με αυτόν για ένα δυαδικό δέντρο αναζήτησης
- Από το παραπάνω θεώρημα , η αναζήτηση σε ένα μελανέρυθρο δέντρο παίρνει $O(\log n)$ χρόνο

Εισαγωγή

- Για να εκτελέσουμε τη λειτουργία insertItem(k, o), εκτελούμε τον αλγόριθμο εισαγωγής για δυαδικά δέντρα αναζήτησης και χρωματίζουμε κόκκινο τον νεοεισαχθέντα κόμβο εκτός και αν είναι η ρίζα
  - Διατηρούμε τις ιδιότητες ρίζας, βάθους και την εξωτερική ιδιότητα
  - Αν ο γονιός v του z είναι μαύρος, διατηρούμε και την εσωτερική ιδιότητα και εέχουμε τελειώσει
  - Αλλιώς (αν ο v είναι κόκκινος) έχουμε ένα διπλό κόκκινο κόμβο (δηλαδή μία παραβίαση της εσωτερικής ιδιότητας), που απαιτεί αναδιοργάνωση του δέντρου
- Παράδειγμα όπου η εισαγωγή του 4 προκαλέι ένα διπλά κόκκινο κόμβο:

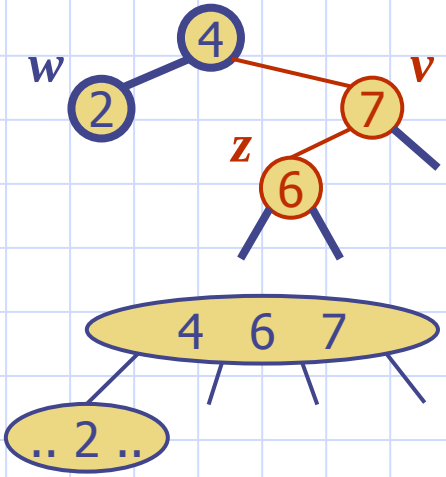


Αποκατάσταση ενός διπλά κόκκινου κόμβου

- Έστω ένα διπλά κόκκινος κόμβος με παιδί z και γονιό v, και έστω w ο αδερφός του v

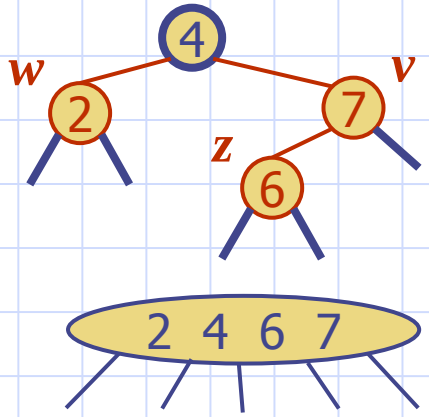
Περίπτωση 1: ο w είναι μάυρος

- Το διπλό κόκκινο είναι μία λάθος αντικατάσταση ενός 4-κόμβου
- Αναδόμηση: Αλλάζουμε την αντικατάσταση του 4-κόμβου



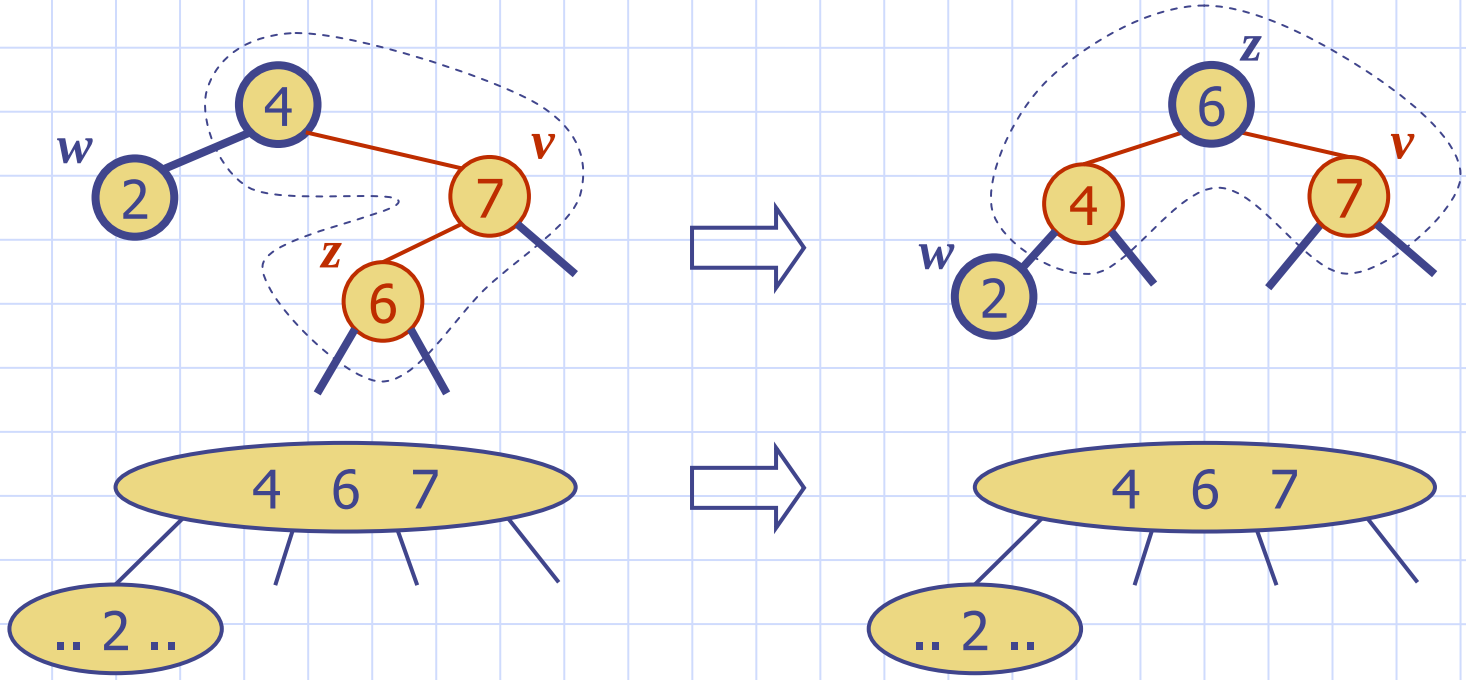
Περίπτωση 2: ο w είναι κόκκινος

- Το διπλό κόκκινο αντιστοιχεί σε μία υπερχείλιση
- Αναχρωματισμός: κάνουμε το αντίστοιχο ενός split



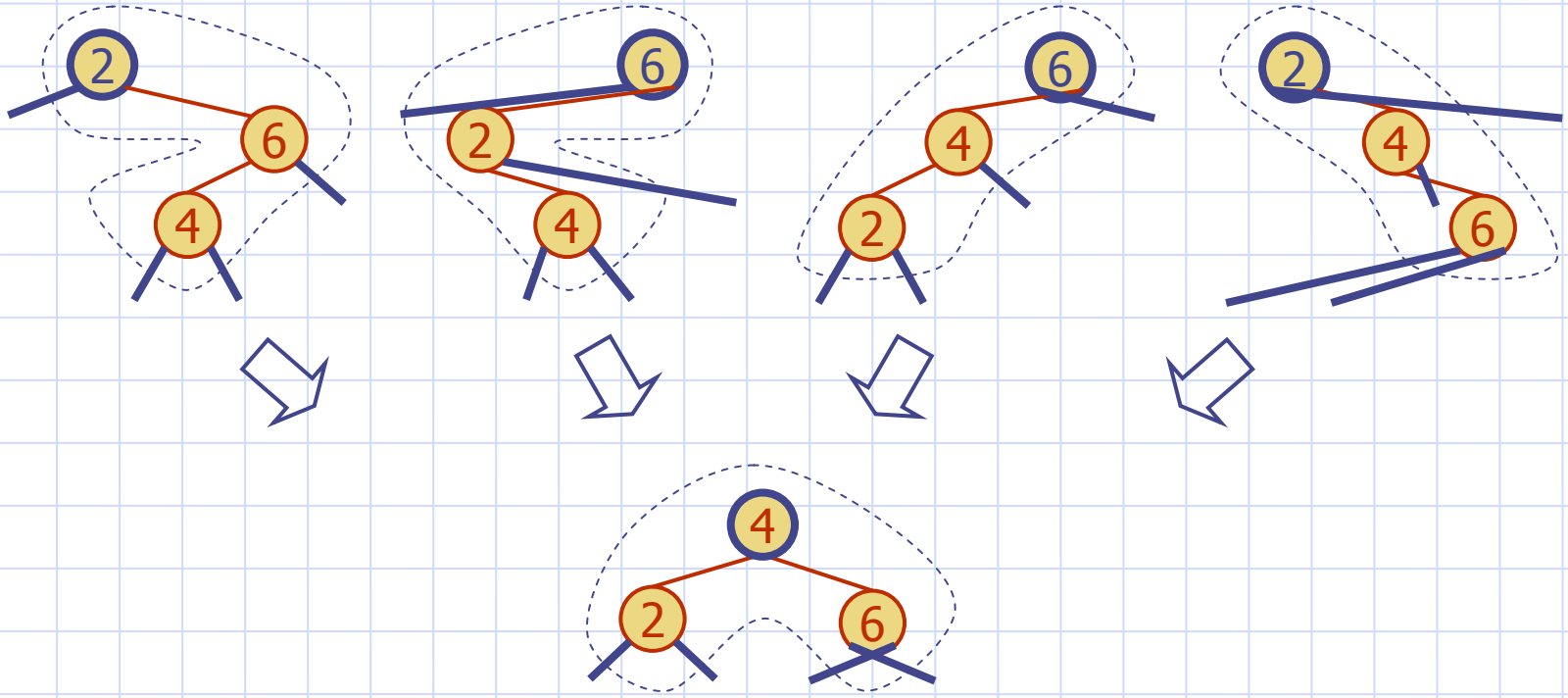
Αναδόμηση

- Μία αναδόμηση αποκαθιστά ένα διπλό κόκκινο γονέος-παιδιού όταν ο κόκκινος κόμβος γονέας έχει ένα μαύρο αδερφό.
- Είναι ισοδύναμο με την αποκατάσταση της σωστής αντικατάστασης ενός 4-κόμβου
- Αποκαθίσταται η εσωτερική ιδιότητα και οι υπόλοιπες ιδιότητες διατηρούνται



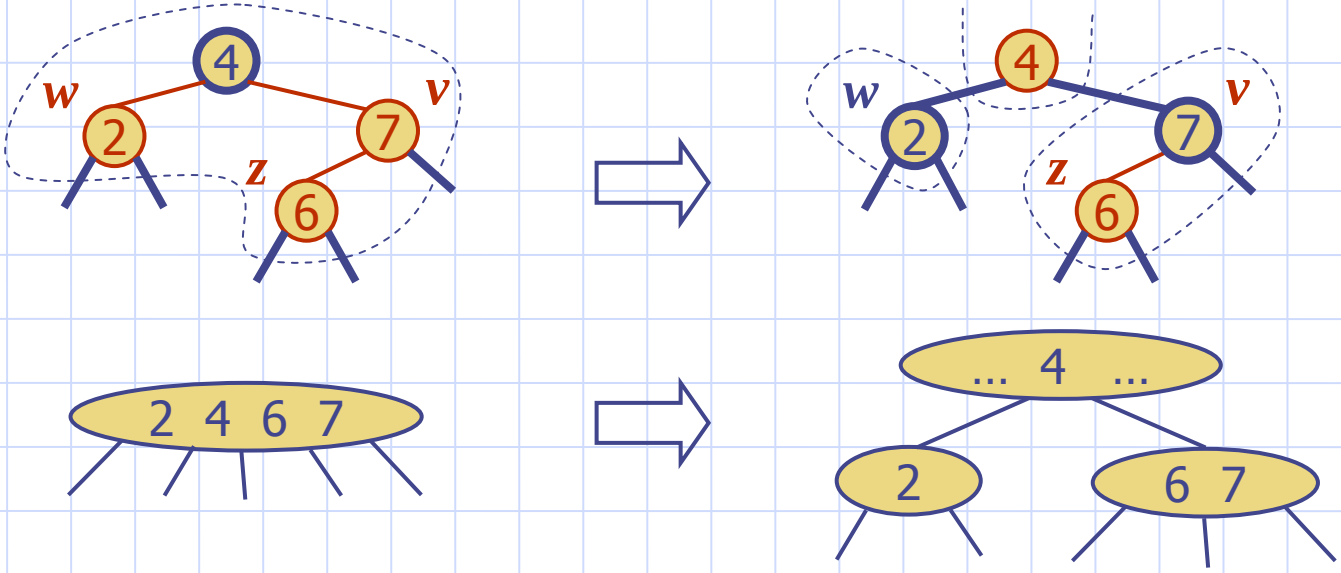
Αναδόμηση(συν.)

- Υπάρχουν τέσσερις τύποι αναδόμησης ανάλογα με το αν οι διπλά κόκκινοι κόμβοι είναι αριστερά ή δεξιά παιδιά



Αναχρωματισμός

- Ο αναχρωματισμός διορθώνει ένα διπλά κόκκινο παιδιού-γονέος όταν ο κόμβος-γονέας έχει ένα κόκκινο αδερφό
- Ο γονιός v και ο αδερφός του w γίνονται μαύροι και ο παππούς u γίνεται κόκκινος,εκτός και αν είναι η ρίζα
- Είναι ισοδύναμος με ένα split σε έναν 5-κόμβο
- Η παραβίαση του διπλού κόκκινου μπορεί να μεταδοθεί στον παππού u



Ανάλυση της εισαγωγής

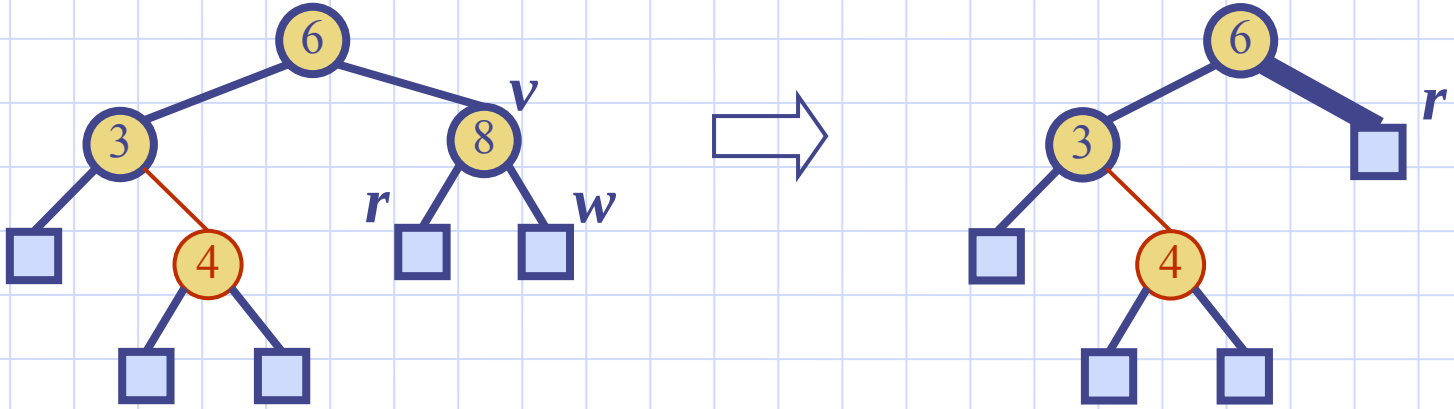
Algorithm ***insertItem***(k, o)

1. Ψάχνουμε ένα κλειδί k για να εντοπίσουμε τον εισαχθέντα κόμβο z
2. Προσθέτουμε το νέο στοιχείο (k, o) στον κόμβο z και χρωματίζουμε τον z κόκκινο
3. **while** ***doubleRed***(z)
   if ***isBlack***$($***sibling***$($***parent***$(z)))$
      $z \leftarrow$ ***restructure***(z)
      return
   else { ***sibling***$($***parent***(z) is red }
      $z \leftarrow$ ***recolor***(z)

- 'ενα μελανέρυθρο δέντρο έχει ύψος $O(\log n)$
- Το βήμα 1 παίρνει $O(\log n)$ χρόνο αφού επισκεπτόμαστε $O(\log n)$ κόμβους
- Το βήμα 2 παίρνει χρόνο $O(1)$
- Το βήμα 3 παίρνει $O(\log n)$ χρόνο αφού εκτελούμε
  - $O(\log n)$ αναχρωματισμούς, χρόνου $O(1)$ έκαστος, και
  - το πολύ μία αναδόμηση χρόνου $O(1)$
- Άρα μια εισαγωγή σε ένα μελανέρυθρο δέντρο γίνεται σε χρόνο $O(\log n)$

Διαγραφή

- Για να εκτελέσουμε τη λειτουργία remove(*k*), πρώτα εκτελούμε τον αλγόριθμο διαγρφής για δυαδικά δέντρα αναζήτησης
- Έστω *v* ο διαγεγραμμένος εσωτερικός κόμβος, *w* ο διαγεγραμμένος εξωτερικός κόμβος, και *r* ο αδερφός του *w*
  - Αν ο *v* ή ο *r* ήταν κόκκινος, χρωματίζουμε τον *r* μαύρο και έχουμε τελειώσει
  - Αλλιώς (αν ο *v* και ο *r* ήταν και οι δύο μαύροι) ο *r* είναι ***διπλά μαύρος,*** και έχουμε μια παραβίαση της εσωτερικής ιδιότητας που απαιτεί μια αναδιοργάνωση του δέντρου
- Παράδειγμα οπου η διαγραφή του 8 προκαλέι ένα διπλά μαύρο:



Αποκατάσταση ενός διπλά μαύρου κόμβου

- Ο αλγόριθμος για την αποκατάσταση έναν διπλά μαύρου κόμβου w με αδερφό y αφορά τρεις περιπτώσεις

  Περίπτωση 1: ο y είναι μαύρος και έχει ένα κόκκινο παιδί
  - Κάνουμε μία αναδόμηση, ισοδύναμη με μια μεταφορά και έχουμε τελειώσει

  Περίπτωση 2: ο y είναι μαύρος και τα παιδιά του είναι και τα δύο μαύρα
  - Κάνουμε έναν αναχρωματισμό, ισοδύναμο με μία συγχώνευση, που μπορεί να μεταδώσει την παραβίαση διπλά μαύρου κόμβου προς τα πανω

  Περίπτωση 3: ο y είναι κόκκινος
  - Κάνουμε μία προσαρμογή, ισοδύναμη με την επιλογή διαφορετικής αναπαράστασης ενός 3-κόμβου, μετά από την οποία έχουμε την περίπτωση 1 η την περίπτωση 2
- Η διαγραφή σε ένα μελανέρυθρο δέντρο παίρνει $O(\log n)$ χρόνο

Αναδιοργάνωση μελανέρυθρου δέντρου

Insertion	Αποκατάσταση διπλά κόκκινου κόμβου	
Μελανέρυθρο δέντρο	**(2,4)δέντρο**	**Αποτέλεσμα**
αναδόμηση	αλλαγή αναπαράστασης ενός 4-κόμβου	αφαίρεση
αναχρωματισμός	split	αφάιρεση ή διάδοση

Διαγραφή	Αποκατάσταση διπλά	μαύρου κόμβου
Μελανέρυθρο δέντρο	**(2,4) δέντρο**	**Αποτέλεσμα**
αναδόμηση	μεταφορά	αφαίρεση
αναχρωματισμός	συγχώνευση	αφαίρεση ή διάδοση
προσαρμογή	αλλαγή αναπαράστασης ενός 3-κόμβου	ακολουθεί αναδόμηση ή αναχρωματισμός

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα αδειοδότησης

- Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγο Έργο 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».

[1] http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/

- Ως Μη Εμπορική ορίζεται η χρήση:
  - που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
  - που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
  - που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

- Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Σημείωμα Αναφοράς

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.