ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινὸ Ἑξάμηνο 2015-2016

Καθηγητὴς Ν. Γ. Τζανάκης

Ἀσκήσεις τῆς $9^{ης}$ ἑβδομάδας

60. (α′) Ἔστω $f(X)$ μὴ μηδενικὸ πολυώνυμο μὲ *ἀκέραιους* συντελεστές. Ἔστω ὅτι ὁ a/b, ὅπου $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ καὶ $(a, b) = 1$, εἶναι ρίζα τοῦ $f(X)$. Ἀποδεῖξτε ὅτι ὁ b διαιρεῖ τὸν συντελεστὴ μεγιστοβαθμίου ὅρου τοῦ $f(X)$ καὶ ὁ a διαιρεῖ τὸν σταθερὸ ὅρο τοῦ $f(x)$.
(β′) Ἐφαρμογή: Γιὰ καθένα ἀπὸ τὰ παρακάτω πολυώνυμα του $\mathbb{Z}[X]$ ὑπολογῖστε τοὺς πρωτοβάθμιους παράγοντές του, ποὺ ἀνήκουν στὸ $\mathbb{Z}[X]$:
$f_1(X) = 2X^4 - 9X^3 + 13X^2 - 4X - 3$, $f_2(X) = 2X^4 + 3X^3 + 5X^2 - X - 6$,
$f_3(X) = 2X^4 - 9X^3 + 11X^2 + X - 6$.
Μερικὴ ἀπάντηση: Τὸ $f_1(X)$ ἔχει ἕναν ἀκριβῶς πρωτοβάθμιο παράγοντα στὸ $\mathbb{Z}[X]$, τὸ $f_2(X)$ δὲν ἔχει τέτοιον πρωτοβάθμιο παράγοντα, ἐνῶ τὸ $f_3(X)$ ἔχει ἀκριβῶς δύο πρωτοβάθμιους παράγοντες στὸ $\mathbb{Z}[X]$.
(γ′) Ἐφαρμόστε τὸ (α′) καὶ ἀποδεῖξτε ὅτι, ἂν $n \geq 2$ καὶ ὁ θετικὸς ἀκέραιος d δὲν εἶναι n-οστὴ δύναμη ἀκεραίου, τότε ὁ $\sqrt[n]{d}$ δὲν εἶναι ρητὸς ἀριθμός.
Ὑπόδειξη: Τὸ νὰ εἶναι ὁ $\sqrt[n]{d}$ ρητὸς ἀριθμός ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ νὰ ἔχει ρητὴ ρίζα a/b (ὅπως στὸ ἐρώτημα (α′)) τὸ πολυώνυμο $X^n - d$.

61. Ἔστω ἀκέραιος d, ὄχι τέλειο τετράγωνο, δηλαδή, ὁ d δὲν εἶναι τετράγωνο ἀκεραίου. (α′) Θεωρῆστε τὸν δακτύλιο $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{Z}\}$. Δεῖξτε ὅτι ἡ ἀπεικόνιση $\phi : \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \to \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, ποὺ ὁρίζεται: $\phi(a + b\sqrt{d}) = a - b\sqrt{d}$, εἶναι ἰσομορφισμὸς δακτυλίων, δηλαδή, *αὐτομορφισμὸς* τοῦ $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. (Οἱ ἰσομορφισμοὶ ἀπὸ ἕνα δακτύλιο στὸν ἑαυτό του λέγονται *αὐτομορφισμοὶ* τοῦ δακτυλίου.)
(β′) (Ἐφαρμογὴ τοῦ (α′)) Ἔστω ὅτι τὸ $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ ἔχει κάποια ρίζα τῆς μορφῆς $a + b\sqrt{d}$, ὅπου τὰ $a, b \in \mathbb{Z}$. Ἀποδεῖξτε ὅτι ὁ ἀριθμὸς $a - b\sqrt{d}$ εἶναι, ἐπίσης, ρίζα τοῦ $f(X)$.
(γ′) (Ἐφαρμογὴ τοῦ (α′)) Ἔστω ὅτι $m, n \in \mathbb{Z}$. Ὑπολογῖστε τύπους γιὰ τοὺς ἀκεραίους x, y, οἱ ὁποῖοι ἱκανοποιοῦν τὴ σχέση $x + y\sqrt{5} = (2 + \sqrt{5})^m(1 - 2\sqrt{5})^n + (3 - 2\sqrt{5})^m(1 + 4\sqrt{5})^n$.

62. (α′) Ἔστω ὅτι R, S εἶναι δακτύλιοι μὲ μοναδιαῖο καὶ $\phi : R \to S$ ἐπιμορφισμὸς δακτυλίων. Ἀποδεῖξτε ὅτι $\phi(1_R) = 1_S$.
(β′) Ἀποδεῖξτε ὅτι δὲν ὑπάρχει ἐπιμορφισμὸς δακτυλίων $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$.

63. (α′) Ἔστω μεταθετικὸς δακτύλιος R μὲ μοναδιαῖο, $r \in R$ καὶ $\epsilon_r : R[X] \to R$ ὁ ὁμομορφισμὸς ἐκτίμησης στὸ r. Ποιὸς εἶναι ὁ $\ker \epsilon_r$; Στὴν περίπτωση ποὺ ὁ R εἶναι σῶμα, ὑπολογῖστε ἕνα πολυώνυμο $f(X) \in R[X]$, τέτοιο ὥστε, ὁ $\ker \phi$ νὰ ταυτίζεται μὲ τὸ σύνολο τῶν πολλαπλασίων τοῦ $f(X)$.
(β′) Ποιὸς εἶναι ὁ πυρήνας τοῦ ὁμομορφισμοῦ $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m$ ποὺ στέλνει κάθε $a \in \mathbb{Z}$ στὴν κλάση $[a] \in \mathbb{Z}_m$;

64. Ἔστω m, n ἀκέραιοι > 1 καὶ $n|m$. Θεωρῆστε τοὺς δακτυλίους $\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n$ καὶ ἀντιστοιχῆστε σὲ κάθε κλάση $[a]_m \in \mathbb{Z}_m$ τὴν κλάση $[a]_n \in \mathbb{Z}_n$. Ἀποδεῖξτε ὅτι αὐτὴ ἡ ἀντιστοιχία εἶναι μία καλὰ ὁρισμένη ἀπεικόνιση $\phi : \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_n$, ἡ ὁποία εἶναι ἐπιμορφισμὸς δακτυλίων. Ὑπολογῖστε τὸν $\ker \phi$.

65. Ἔστω $\phi : R \to S$ ἰσομορφισμὸς δακτυλίων. Ἀποδεῖξτε τὰ παρακάτω:
(α′) Ὁ S ἔχει (ἀντιστοίχως, δὲν ἔχει) μηδενοδιαιρέτες ἂν καὶ μόνο ἂν ὁ R ἔχει (ἀντιστοίχως, δὲν ἔχει) μηδενοδιαιρέτες.
(β′) Ὁ S εἶναι ἀκέραια περιοχὴ ἂν καὶ μόνο ἂν ὁ R εἶναι ἀκέραια περιοχή.
(γ′) Ὁ S εἶναι σῶμα ἂν καὶ μόνο ἂν ὁ R εἶναι σῶμα.

66. Σὲ κάθε μία ἀπὸ τὶς παρακάτω περιπτώσεις δακτυλίων R, S δικαιολογῆστε γιατὶ εἶναι ἀδύνατον νὰ ὑπάρχει ἐπιμορφισμὸς δακτυλίων $\phi : R \to S$.

$$\text{(α′) } R = \mathbb{Z},\ S = \mathbb{Q} \qquad \text{(β′) } R = 2\mathbb{Z},\ S = \mathbb{Z} \qquad \text{(γ′) } R = 2\mathbb{Z},\ S = 3\mathbb{Z}$$

$$\text{(δ′) } R = \mathbb{Q},\ S = M_2(\mathbb{Z}) \qquad \text{(ε′) } R = \mathbb{Z}[\sqrt{2}],\ S = \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$$

$$\text{(ϛ′) } R = \mathbb{Z}[\sqrt{3}],\ S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3b \\ 3b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

Ὑπόδειξη. Λάβετε ὑπ' ὄψη τὴν ἄσκηση 62 (α′).

67. Παρακάτω δίδονται ζεύγη δακτυλίων. Ποιὰ ἀπὸ αὐτὰ εἶναι ἰσόμορφα καὶ ποιὰ ὄχι; Δικαιολογῆστε τὶς ἀπαντήσεις σας.

$$\text{(α′) } R = \mathbb{R},\ S = \mathbb{Z} \quad \text{(β′) } R = \mathbb{Z},\ S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{(γ′) } R = \mathbb{Z}_m,\ S = \mathbb{Z}_n,\ m \neq n$$

$$\text{(δ′) } R = \mathbb{Z}[i],\ S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z} \right\} \qquad \text{(ε′) } R = \mathbb{Z},\ S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{Z} \right\}$$

Ὑπόδειξη. Λάβετε ὑπ' ὄψη τὴν ἄσκηση 65.

68. Ἔστω R, S μεταθετικοὶ δακτύλιοι μὲ μοναδιαῖα στοιχεῖα $1_R, 1_S$, ἀντιστοίχως, καὶ ὁμομορφισμὸς δακτυλίων $\phi : R \to S$, ποὺ ἱκανοποιεῖ τὴν ἐπιπλέον συνθήκη $\phi(1_R) = 1_S$. Ὁρίζομε τὴν ἀπεικόνιση $\tilde{\phi} : R[X] \to S[X]$ ὡς ἑξῆς: Ἂν $f(X) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$, τότε $\tilde{\phi}(f(X)) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi(a_i) X^i$. Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ $\tilde{\phi}$ εἶναι ὁμομορφισμὸς δακτυλίων.

69. (α′) Ἔστω $f(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ μὲ $n > 1$ καὶ ἀκέραιος $m > 1$, ποὺ δὲν διαιρεῖ τὸν a_n (εἰδικώτερα, αὐτὸ συνεπάγεται ὅτι $a_n \neq 0$). Θεωρῆστε τὸν δακτύλιο $\mathbb{Z}_m$, τὸν δακτύλιο τῶν πολυωνύμων μιᾶς μεταβλητῆς πάνω ἀπὸ τὸν $\mathbb{Z}_m$ καὶ τὸ πολυώνυμο $\overline{f}(X) = [a_n]X^n + \cdots + [a_1]X + [a_0] \in \mathbb{Z}_m[X]$. Ἀποδεῖξτε ὅτι, ἂν τὸ $\overline{f}(X)$ εἶναι ἀνάγωγο στὸ $\mathbb{Z}_m[X]$, τότε καὶ τὸ $f(X)$ εἶναι ἀνάγωγο στὸ $\mathbb{Z}[X]$.
Ὑπόδειξη. Ἀπὸ τὴν ἄσκηση 68, ὁ ὁμομορφισμὸς δακτυλίων $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m$, ποὺ ὁρίζεται: $\phi(a) = [a]$, ἐπεκτείνεται στὸν ἰσομορφισμὸ $\tilde{\phi} : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}_m[X]$. Ἂν $f(X) = g(X)h(X)$ μὲ τὰ $g(X), h(X)$ μὴ σταθερά, τότε ἐφαρμόστε σ' αὐτὴ τὴ σχέση τὸν ὁμομορφισμὸ $\tilde{\phi}$.
(β′) Ἐφαρμογή: Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ $f(X) = X^4 - 3X^3 + 6X^2 + 4X + 11 \in \mathbb{Z}[X]$ εἶναι ἀνάγωγο στὸ $\mathbb{Z}[X]$.
Ὑπόδειξη. Ἐφαρμόστε τὸ (α′) μὲ $m = 2$ εἴτε $m = 3$.

Ἀναφορὲς

[1] Δ. Βάρσος, Δ. Δεριζιώτης, Γ. Εμμανουήλ, Μ. Μαλιάκας, Ο. Ταλέλλη, *Μια Εισαγωγή στην Άλγεβρα*, Γ΄ Έκδοση Εκδόσεις ΣΟΦΙΑ, Αθήνα 2012.