Αλγεβρα Ι

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

Χειμερινὸ ἑξάμηνο 2015-2016

Βασικὴ περιγραφὴ τῶν θεμάτων ποὺ συζητήθηκαν τὴν 11^{η} ἑβδομάδα

(Δὲν πρόκειται γιὰ λεπτομερῆ περιγραφή.)

• **Μεταθέσεις, ποὺ λέγονται κύκλοι**.

῾Ο συμβολισμὸς $\sigma = (a_1\, a_2\, \ldots a_{k-1}\, a_k)$ γιὰ τὶς μεταθέσεις-κύκλους σημαίνει

$$\sigma(a_1) = a_2, \sigma(a_2) = a_3, \ldots, \sigma(a_{k-1} = a_k, \sigma(a_k) = a_1.$$

῾Ο ἀκέραιος k (≥ 2) εἶναι τὸ *μῆκος* τοῦ κύκλου.

Τὰ $a_1, \ldots, a_k$ εἶναι διαφορετικὰ μεταξύ τους.

῎Αν $\sigma = (a_1\, a_2\, \ldots a_{k-1}\, a_k)$, τότε $\sigma^{-1} = (a_k\, a_{k-1}\, \ldots a_2\, a_1)$

᾿Αντιμεταθέσεις: Οἱ κύκλοι μήκους 2, δηλαδή, τῆς μορφῆς $(a_1\, a_2)$.

Οἱ κύκλοι $(a_1\, a_2\, \ldots\, a_k)$, $(b_1\, b_2\, \ldots\, b_l)$ λέγονται *ξένοι* ἂν $\{a_1, \ldots, a_k\} \cap \{b_1, \ldots, b_l\} = \emptyset$.

Κάθε μετάθεση γράφεται ὡς γινόμενο ξένων κύκλων.

Κάθε κύκλος γράφεται ὡς γινόμενο ἀντιμεταθέσεων (μὲ πολλοὺς τρόπους ἐν γένει).

Γιὰ παράδειγμα: $(a_1\, a_2\, \ldots\, a_{k-1}\, a_k) = (a_1\, a_k)(a_1\, a_{k-1}) \cdots (a_1\, a_3)(a_1\, a_2)$.

• **Πρόταση 1.** *῎Εστω $n \geq 2$ καὶ ἡ ὁμάδα μεταθέσεων S_n.*

(α΄) Γιὰ κάθε κύκλο $\sigma \in S_n$ ἰσχύει: τάξη (σ) = (μῆκος τοῦ σ).

(β΄) ῎Αν $\sigma, \tau \in S_n$ εἶναι ξένοι κύκλοι, τότε $\sigma\tau = \tau\sigma$.

(γ΄) ῎Εστω $\sigma, \tau \in S_n$ ξένοι κύκλοι μὲ μήκη k, l, ἀντιστοίχως. ῎Αν γιὰ κάποιο $m \in \mathbb{Z}$ ἰσχύει $\sigma^m = \tau^m$, τότε m εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ ΕΚΠ (k, l), ὁπότε $\sigma^m = \mathrm{id} = \tau^m$.

(δ΄) ῎Αν $\sigma, \tau \in S_n$ εἶναι ξένοι κύκλοι μὲ μήκη k, l, ἀντιστοίχως, τότε τάξη $(\sigma\tau)$ = ΕΚΠ (k, l).

• **῎Αρτιες καὶ περιττὲς μεταθέσεις**.

• **Θεώρημα 2.** *῎Αν ἀναλύσομε μιὰ μετάθεση σ ὡς γινόμενο ἀντιματαθέσεων μὲ δύο, τρόπους: $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_\mu$ καὶ $\sigma = \tau_1\tau_2 \cdots \tau_\nu$, ὅπου τὰ σ_i καὶ τὰ τ_j συμβολίζουν ἀντιμεταθέσεις, τότε $\mu \equiv \nu \pmod 2$, δηλαδή, τὰ μ, ν εἶναι, ἢ καὶ τὰ δύο ἄρτια ἢ καὶ τὰ δύο περιττά.*

῾Ορισμός. ῎Αν, ἀναλύοντας μιὰ μετάθεση σ σὲ γινόμενο ἀντιμεταθέσεων, τὸ πλῆθος τους εἶναι ἄρτιο, τότε λέμε ὅτι ἡ σ εἶναι *ἄρτια μετάθεση*, ἐνῶ, ἂν τὸ πλῆθος τῶν ἀντιμεταθέσεων, στὴν ὁποία ἀναλύσαμε τὴ σ εἶναι περιττό, τότε χαρακτηρίζομε τὴ σ *περιττὴ* μετάθεση. Τὸ σύνολο τῶν ἀρτίων μεταθέσεων συμβολίζεται A_n.

• **Πρόταση 3.** *(α΄) Τὸ γινόμενο δύο ἀρτίων μεταθέσεων εἶναι ἄρτια μετάθεση.*
(β΄) Τὸ γινόμενο δύο περιττῶν μεταθέσεων εἶναι ἄρτια μετάθεση.
(γ΄) Τὸ γινόμενο ἄρτιας μετάθεσης ἐπὶ περιττὴ μετάθεση εἶναι περιττὴ μετάθεση.
(δ΄) Ἄν ἡ μετάθεση σ εἶναι ἄρτια (ἀντιστ. περιττή), τότε καὶ ἡ σ^{-1} εἶναι ἄρτια (ἀντιστ. περιττή).
(ε΄) A_n εἶναι ὑποομάδα τῆς S_n, τάξεως $n!/2$ καὶ λέγεται ἐναλλάσουσα ὁμάδα *βαθμοῦ n.*

Πλευρικὲς κλάσεις ἢ Σύμπλοκα ὡς πρὸς μιὰ ὑποομάδα.

Ἔστω ὁμάδα $(G, \cdot)$ καὶ $H \leq G$.

Στὴ G ὁρίζομε τὴ σχέση: $a \sim_A b \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$.

• **Πρόταση 4.** *Ἡ σχέση $\sim_A$ εἶναι σχέση ἰσοδυναμίας στὸ σύνολο G. Γιὰ $a \in G$, ἡ κλάση ἰσοδυναμίας τοῦ a ὡς πρὸς τὴ σχέση $\sim_A$ εἶναι τὸ σύνολο $aH = \{ah : \ h \in H\}$.*

Ἡ κλάση ἰσοδυναμίας aH λέγεται *ἀριστερὴ κλάση*, ἢ *ἀριστερὸ σύμπλοκο* τοῦ a ὡς πρὸς τὴν (ἢ mod) H.

• **Πρόταση 5.** *Ἔστω $a, b \in G$.*
(α΄) Ἰσχύει ἕνα ἀπὸ τὰ δύο: $aH = bH$ ἢ $aH \cap bH = \emptyset$. Δηλαδή, ἂν οἱ κλάσεις aH, bH ἔχουν ἔστω καὶ ἕνα κοινὸ στοιχεῖο, τότε, ἀναγκαστικά, ταυτίζονται.
(β΄) $aH = bH \Leftrightarrow a^{-1}b \in H \Leftrightarrow b \in aH \Leftrightarrow a \in bH$.

Ἀνάλογη μὲ τὴ σχέση $\sim_A$ εἶναι ἡ $\sim_\Delta$, ποὺ ὁρίζεται ὡς ἑξῆς: $a \sim_\Delta b \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$.

• **Πρόταση 6.** *Ἡ σχέση $\sim_\Delta$ εἶναι σχέση ἰσοδυναμίας στὸ σύνολο G. Γιὰ $a \in G$, ἡ κλάση ἰσοδυναμίας τοῦ a ὡς πρὸς τὴ σχέση $\sim_\Delta$ εἶναι τὸ σύνολο $Ha = \{ha : \ h \in H\}$.*

Ἡ κλάση ἰσοδυναμίας Ha λέγεται *δεξιὰ κλάση*, ἢ *δεξιὸ σύμπλοκο* τοῦ a ὡς πρὸς τὴν (ἢ mod) H.

• **Πρόταση 7.** *Ἔστω $a, b \in G$.*
(α΄) Ἰσχύει ἕνα ἀπὸ τὰ δύο: $Ha = Ha$ ἢ $Ha \cap Hb = \emptyset$. Δηλαδή, ἂν οἱ κλάσεις Ha, Hb ἔχουν ἔστω καὶ ἕνα κοινὸ στοιχεῖο, τότε, ἀναγκαστικά, ταυτίζονται.
(β΄) $aH = bH \Leftrightarrow a^{-1}b \in H \Leftrightarrow b \in aH \Leftrightarrow a \in bH$.
$Ha = Hb \Leftrightarrow ab^{-1} \in H \Leftrightarrow b \in Ha \Leftrightarrow a \in Hb$.

• **Κανονικὴ ὑποομάδα**. Ἡ H λέγεται κανονικὴ ὑποομάδα τῆς G ἂν, γιὰ κάθε $a \in G$ ἰσχύει $aH = Ha$. Στὴν περίπτωση αὐτή, ἀντὶ τοῦ συμβολισμοῦ $H \leq G$ χρησιμοποιοῦμε τὸν συμβολισμὸ $H \triangleleft G$.

Ἀναφορὲς

[1] Δ. Βάρσος, Δ. Δεριζιώτης, Γ. Εμμανουήλ, Μ. Μαλιάκας, Ο. Ταλέλλη, *Μια Εισαγωγή στην Άλγεβρα*, Γ΄ έκδοση, Εκδόσεις ΣΟΦΙΑ, Αθήνα 2012.