Αλγεβρα Ι

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

Χειμερινὸ ἑξάμηνο 2015-2016

Βασικὴ περιγραφὴ τῶν θεμάτων ποὺ συζητήθηκαν τὴν 13^{η} ἑβδομάδα
(Δὲν πρόκειται γιὰ λεπτομερῆ περιγραφή.)

• **Δράση ὁμάδας σὲ μιὰ πολυωνυμικὴ παράσταση**. Ἔστω μιὰ πολυωνυμικὴ παράσταση $f(a_1,\dots,a_n)$ μὲ συντελεστὲς ἀπὸ ἕνα μεταθετικὸ δακτύλιο R μὲ μοναδιαίο. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι τὰ $a_1,\dots,a_n$ δὲν εἶναι στοιχεῖα τοῦ R, ἀλλὰ "μεταβλητές", ὁπότε, δύο πολυωνυμικὲς παραστάσεις $f(a_1,\dots,a_n)$ καὶ $g(a_1,\dots,a_n)$ εἶναι ἴσες ἂν καὶ μόνο ἂν κάθε μονώνυμο τῶν $a_1,\dots,a_n$ στὴν παράσταση f καὶ στὴν παράσταση g ἔχουν ἴσους συντελεστές.

Ἔστω $\sigma\in S_n$. Τὸ σ "δρᾶ" στὴν παράσταση $f(a_1,\dots,a_n)$ καὶ δίνει τὴν παράσταση $f^{\sigma}(a_1,\dots,a_n)$, ἡ ὁποία ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$f^{\sigma}(a_1,a_2,\dots,a_n)=f(a_{\sigma(1)},a_{\sigma(2)},\dots,a_{\sigma(n)}).$$

Γιὰ παράδειγμα, ἂν $f(a_1,a_2,a_3,a_4)=a_1^3a_2+a_1a_4+2a_3^4$ καὶ $\sigma=(1\,2\,3\,4)$, τότε $f^{\sigma}(a_1,a_2,a_3,a_4)=a_2^3a_3+a_2a_1+2a_4^4$.

• **Πρόταση 1.** *Ἂν $\sigma,\tau\in S_n$, τότε $f^{\sigma\tau}(a_1,\dots,a_n)=(f^{\tau}(a_1,\dots,a_n))^{\sigma}$, ἤ, ἁπλοποιώντας τὸν συμβολισμό, $f^{\sigma\tau}=(f^{\tau})^{\sigma}$.*

Προσέξτε τὴν ἀλλαγὴ διάταξης τῶν σ,τ.

• **Πρόταση - Ὁρισμός 2.** *Ἔστω ἡ πολυωνυμικὴ παράσταση $f(a_1,\dots,a_n)$. Τὸ σύνολο*

$$\{\sigma\in S_n\ :\ f^{\sigma}(a_1,\dots,a_n)=f(a_1,\dots,a_n)\}$$

εἶναι ὑποομάδα τῆς S_n, ἡ ὁποία λέγεται ὁμάδα συμμετρίας τῆς πολυωνυμικῆς παράστασης f.

Στὸ μάθημα ἀναλύσαμε ἐκτενῶς τὸ ἑξῆς:
Παράδειγμα. Ἔστω $f(a_1,a_2,a_3,a_4)=a_1a_2+a_3a_4$. Ἡ ὁμάδα συμμετριῶν τῆς f ἀποτελεῖται ἀπ' τὶς ἑξῆς μεταθέσεις: 1 (= id), (3 4), (1 2), (1 2)(3 4), (1 3)(2 4), (1 3 2 4), (1 4 2 3), (1 4)(2 3). Ἂν θέσομε $a=(1\,3\,2\,4)$, $b=9(3\,4)$, τότε ἡ ὁμάδα συμμετρίας τῆς f ἔχει γεννήτορες a,b, οἱ ὁποῖοι ἱκανοποιοῦν τὶς σχέσεις $a^3=1=b^2$ καὶ $ba=a^3b$. Ἄρα, ἡ ὁμάδα συμμετρίας τῆς f εἶναι ἰσόμορφη μὲ τὴ διεδρικὴ ὁμάδα D_4.

Ἀναφορὲς

[1] Δ. Βάρσος, Δ. Δεριζιώτης, Γ. Εμμανουήλ, Μ. Μαλιάκας, Ο. Ταλέλλη, *Μια Εισαγωγή στην Άλγεβρα*, Γ΄ έκδοση, Εκδόσεις ΣΟΦΙΑ, Αθήνα 2012.