ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινὸ Ἑξάμηνο 2015-2016

Καθηγητὴς Ν. Γ. Τζανάκης

Ἀσκήσεις τῆς 13ης ἑβδομάδας

97. Ποιὲς ἀπὸ τὶς παρακάτω ἀπεικονίσεις $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ εἶναι ὁμομορφισμοί τῆς πολλαπλασιαστικῆς ὁμάδας $\mathbb{R}^*$ στὸν ἑαυτό της; Γιὰ τοὺς ὁμομορφισμούς, βρεῖτε τὸν πυρῆνα τους.

$$x \mapsto -x, \qquad x \mapsto x^2, \qquad x \mapsto x^3, \qquad x \mapsto x^{-1}, \qquad x \mapsto 2x\,, \qquad x \mapsto 10^x\,, \qquad x \mapsto \sqrt{|x|}.$$

98. Ποιὲς ἀπὸ τὶς παρακάτω ἀπεικονίσεις $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ εἶναι ὁμομορφισμοί τῆς πολλαπλασιαστικῆς ὁμάδας $\mathbb{C}^*$ στὸν ἑαυτό της; Γιὰ τοὺς ὁμομορφισμούς, βρεῖτε τὸν πυρῆνα τους.

$$z \mapsto z^6, \qquad z \mapsto \bar{z}, \qquad z \mapsto 2z+1, \qquad z \mapsto z^{-1}.$$

99. Ἔστω κυκλικὴ ὁμάδα $G = \langle g \rangle$ καὶ $\phi : G \to G'$ ὁμομορφισμὸς ὁμάδων. Δεῖξτε ὅτι, ἂν εἶναι γνωστὴ ἡ τιμὴ τῆς ϕ στὸ g, τότε ἡ τιμὴ $\phi(a)$ εἶναι γνωστὴ γιὰ κάθε $a \in G$. Στὴ συνέχεια δεῖξτε ὅτι ἂν $\psi : G \to G'$ εἶναι ὁμομορφισμὸς ὁμάδων καὶ $\phi(g) = \psi(g)$, τότε $\phi = \psi$. Δηλαδή, ἕνας ὁμομορφισμὸς ὁμάδων μὲ πεδίο ὁρισμοῦ κυκλικὴ ὁμάδα καθορίζεται ἀποκλειστικὰ ἀπὸ τὴν τιμή του σ' ἕνα γεννήτορα τῆς ὁμάδας.

100. Ἔστω ὅτι m, n εἶναι ἀκέραιοι ≥ 2 καὶ $d = (m, n)$.

(α΄) Ἔστω $k \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$. Δεῖξτε ὅτι ἡ ἀντιστοιχία

$$\mathbb{Z}_m \ni [a]_m \mapsto [\frac{n}{d}ka]_n \in \mathbb{Z}_n$$

εἶναι μιὰ καλὰ ὁρισμένη ἀπεικόνιση, ἡ ὁποία εἶναι ὁμομορφισμός ὁμάδων. Συμβολῖστε αὐτὸν τὸν ὁμομορφισμὸ μὲ ϕ_k καὶ παρατηρῆστε ὅτι $\phi_k([1]_m) = [\frac{n}{d}k]_n$.

(β΄) Ἔστω $\phi : \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_n$ ἕνας ὁμομορφισμὸς ὁμάδων. Ἀποδεῖξτε ὅτι, ὑπάρχει $k \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$, τέτοιο ὥστε $\phi([1]_m) = [\frac{n}{d}k]_n$. Βάσει τοῦ (α΄) καὶ τοῦ τελευταίου συμπεράσματος τῆς ἀσκήσεως 99, συμπεράνατε ὅτι $\phi = \phi_k$.

Συμπέρασμα: Οἱ ὁμομορφισμοὶ ὁμάδων $\mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_n$ εἶναι, ἀκριβῶς, οἱ d τὸ πλῆθος ἀπεικονίσεις ϕ_k, $k \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$ τοῦ ἐρωτήματος (α΄).

(γ΄) Ἀποδεῖξτε ὅτι, ἂν $(m, n) = 1$, τότε ὁ μοναδικὸς ὁμομορφισμὸς $\mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_n$ εἶναι ὁ μηδενικός, δηλαδή, αὐτὸς ποὺ κάθε κλάση $[a]_m \in \mathbb{Z}_m$ τὴν ἀπεικονίζει στὴ μηδενικὴ κλάση $[0]_n \in \mathbb{Z}_n$.

101. Ἔστω ὅτι G εἶναι ὁμάδα τάξεως m καὶ $\phi : G \to \mathbb{Z}_{15}$ μὴ τετριμμένος ὁμομορφισμὸς ὁμάδων. Ποιὲς ἀπὸ τὶς παρακάτω προτάσεις εἶναι ἀληθεῖς καὶ ποιὲς ὄχι; Δικαιολογῆστε τὶς ἀπαντήσεις σας. (Στὴν περίπτωση ἀρνητικῆς ἀπάντησης θὰ δώσετε ἀντιπαράδειγμα, ποὺ θὰ κατασκευάσετε μὲ βάση τὴν ἄσκηση 100.

(α′) $15|m$ (β′) $m|15$ (γ′) Ἂν ὁ ϕ εἶναι μονομορφισμός, τότε $15|m$.

(δ′) Ἂν ὁ ϕ εἶναι μονομορφισμός, τότε $m|15$.

(ε′) Ἂν ὁ ϕ εἶναι ἐπιμορφισμός, τότε $15|m$.

(ϛ′) Ἂν ὁ ϕ εἶναι ἐπιμορφισμός, τότε $m|15$.

102. Ἔστω ὁμάδα G καὶ $\mathrm{Aut}(G)$ τὸ σύνολο τῶν *αὐτομορφισμῶν* τῆς G, δηλαδή, τὸ σύνολο τῶν ἰσομορφισμῶν $G \to G$. Δεῖξτε ὅτι τὸ σύνολο $\mathrm{Aut}(G)$, ἐφοδιασμένο μὲ τὴν πράξη $\circ$ τῆς σύνθεσης ἀπεικονίσεων, εἶναι ὁμάδα.

103. (α′) Θεωρῆστε τὴν (προσθετικὴ) ὁμάδα $\mathbb{Q}$ καὶ τὴν ὁμάδα $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q})$ τῶν αὐτομορφισμῶν της (βλ. ἄσκηση 102). Ἀποδεῖξτε ὅτι, ἂν $q \in \mathbb{Q}^*$, τότε ἡ ἀπεικόνιση $\phi_q : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, ποὺ ὁρίζεται: $\phi_q(r) = qr\,\forall r \in \mathbb{Q}$, εἶναι αὐτομορφισμὸς τῆς ὁμάδας $\mathbb{Q}$, δηλαδή, $\phi_q \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q})$.

(β′) Ἔστω $\psi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q})$ καὶ $\psi(1) = q \in \mathbb{Q}$. Δεῖξτε ὅτι, γιὰ κάθε $r \in \mathbb{Q}$ ἰσχύει $\psi(r) = qr$ καί, συνεπῶς, σύμφωνα μὲ τὸν συμβολισμὸ τοῦ ἐρωτήματος (α′), $\psi = \phi_q$.

Ὑπόδειξη: Ἔστω $r = a/b$, ὅπου $a, b \in \mathbb{Z}$ καὶ $b \geq 1$. Παρατηρώντας ὅτι $1 = \underbrace{\frac{1}{b} + \cdots + \frac{1}{b}}_{b}$, δεῖξτε ὅτι $q = \psi(1) = \ldots = b\,\psi(\frac{1}{b})$, ἄρα $\psi(1/b) = q/b$. Ὕστερα δεῖξτε ὅτι $\psi(a/b) = qa/b$.

(γ′) Θεωρῆστε τὴν ἀπεικόνιση $f : \mathbb{Q}^* \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Q})$, ποὺ ὁρίζεται: $f(q) = \phi_q$, μὲ τὸ ϕ_q ὅπως στὸ ἐρώτημα (α′). Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ f εἶναι ἰσομορφισμὸς ὁμάδων (προσοχή, ἡ ὁμάδα $\mathbb{Q}^*$ εἶναι ἐφοδιασμένη μὲ τὸν πολλαπλασιασμό), συνεπῶς $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}^*$. Μὲ λόγια: «Ἡ ὁμάδα αὐτομορφισμῶν τῆς προσθετικῆς ὁμάδας $\mathbb{Q}$, εἶναι ἰσόμορφη μὲ τὴν πολλαπλασιαστικὴ ὁμάδα $\mathbb{Q}^*$».

104. Ἔστω $\phi : G \to G'$ ἐπιμορφισμὸς πεπερασμένων ὁμάδων καὶ $m \in \mathbb{N}$. Ἀποδεῖξτε ὅτι, ἂν στὴ G' ὑπάρχει στοιχεῖο τάξεως m, τότε καὶ στὴ G ὑπάρχει στοιχεῖο τάξεως m.

Ὑπόδειξη. Ἂς συμβολίσομε τὶς πράξεις τῶν G, G' πολλαπλασιαστικὰ καὶ τὰ οὐδέτερα στοιχεῖα τους μὲ 1 καὶ $1'$, ἀντιστοίχως. Ἔστω $g' \in G'$ τάξεως m καὶ $g \in G$, τέτοιο ὥστε $\phi(g) = g'$. Ἔστω ὅτι *τάξη* $(g) = n$. Δεῖξτε ὅτι $g'^n = 1'$ καὶ συμπεράνατε ὅτι $m|n$. Ἂν $n = km$, ἀποδεῖξτε ὅτι *τάξη* $(g^k) = m$.

105. Ἔστω $G = \{2^m 3^n : m, n \in \mathbb{Z}\}$. Ἀποδεῖξτε ὅτι $G \leq Z$ καὶ $G \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Ὑπόδειξη: Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ ἀπεικόνσιη $\phi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to G$, μὲ $\phi(m, n) = 2^m 3^n$, εἶναι ἰσομορφισμὸς ὁμάδων.

106. (α′) Ἔστω $\phi : G \to G'$ ἐπιμορφισμὸς ὁμάδων. Ἀποδεῖξτε ὅτι, ἂν ἡ G εἶναι ἀβελιανή, τότε καὶ ἡ G' εἶναι ἀβελιανή.

(β′) Ἀποδεῖξτε ὅτι, ἂν ἡ G εἶναι ἀβελιανὴ ὁμάδα καὶ $n \geq 3$, τότε δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρχει ἐπιμορφισμὸς $G \to S_n$.

Ὑπόδειξη. Παρατηρῆστε ὅτι, ἂν $n \geq 3$ καὶ θεωρήσετε τὶς μεταθέσεις $(1\,2\,3)$, $(1\,2) \in S_n$, τότε $(1\,2\,3)(1\,2) \neq (1\,2)(1\,2\,3)$ καί, συνεπῶς, ἡ S_n δὲν εἶναι ἀβελιανή. Χρησιμοποιῆστε μετὰ τὸ ἐρώτημα (α′).

(γ′) Ἀποδεῖξτε ὅτι, ἂν ἡ G εἶναι ἀβελιανὴ ὁμάδα καὶ $n \geq 3$, τότε δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρχει μονομορφισμὸς $S_n \to G$.

Ἂν $\phi : S_n \to G$ εἶναι μονομορφισμός, τότε $\phi(S_n) \cong S_n$. Ἀλλὰ $\phi(S_n) \leq G$ καί, ἀφοῦ ἡ G εἶναι ἀβελιανή, πρέπει καὶ ἡ $\phi(S_n)$ νὰ εἶναι ἀβελιανή, ἄρα καὶ ἡ ἰσόμορφή της S_n πρέπει νὰ εἶναι ἀβελιανή. Αὐτὸ εἶναι ἀδύνατον γιὰ $n \geq 3$, ὅπως παρατηρήσαμε στὴν ὑπόδειξη τοῦ ἐρωτήματος (β′).

107. Ἔστω V ἡ *ὁμάδα τῶν τεσσάρων τοῦ Klein*: $V = \langle a, b \,|\, a^2 = e = b^2, ab = ba\rangle$ (e τὸ οὐδέτερο στοιχεῖο).

(α′) Ἔστω ὅτι οἱ G, G' εἶναι ὁμάδες καὶ τὰ $a \in G, a' \in G'$ ἔχουν τάξεις m καὶ n, ἀντιστοίχως. Δεῖξτε ὅτι, στὴν ὁμάδα $G \times G'$, τὸ στοιχεῖο (a, a') ἔχει τάξη ΕΚΠ (m, n).

(β′) Ἀποδεῖξτε ὅτι δὲν ὑπάρχει ὁμάδα G, τέτοια ὥστε $G \times V \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$.

Ἂν $G \times V \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$, τότε εἶναι ἁπλὸ νὰ δείξετε ὅτι $|G| = 2$. Τότε, ἀπὸ τὴν Πρόταση 5 (δ′) τῆς 12ης ἑβδομάδας, $G \cong \mathbb{Z}_2$, ἄρα $\mathbb{Z}_2 \times V \cong G \times V \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$. Γρᾶψτε ἕνα-ἕνα τὰ στοιχεῖα τῆς ὁμάδας $\mathbb{Z}_2 \times V$ καὶ διαπιστῶστε ὅτι κανένα δὲν ἔχει τάξη 4. Ἀντιθέτως, βρεῖτε ἕνα στοιχεῖο τῆς $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$, ποὺ ἔχει τάξη 4. Ἐξ αὐτοῦ συμπεράνατε ὅτι οἱ ὁμάδες $\mathbb{Z}_2 \times V$ καὶ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ δὲν εἶναι ἰσόμορφες.

(γ′) Ἀποδεῖξτε ὅτι δὲν ὑπάρχει ὁμάδα G, τέτοια ὥστε $G \times V \cong A_4$. (Ὑπενθύμιση: A_4 εἶναι ἡ ἐναλλάσουσα ὁμάδα βαθμοῦ 4.)

Ἂν $G \times V \cong A_4$, τότε, δεδομένου ὅτι $|A_4| = 4!/2 = 12$, εἶναι ἁπλὸ νὰ δείξετε ὅτι $|G| = 3$. Ἀπὸ τὴν Πρόταση 5 (δ′) τῆς 12ης ἑβδομάδας, $G \cong \mathbb{Z}_3$, ἄρα $\mathbb{Z}_3 \times V \cong G \times V \cong A_4$. Γρᾶψτε ἕνα-ἕνα τὰ στοιχεῖα τῆς ὁμάδας $\mathbb{Z}_3 \times V$ καὶ διαπιστῶστε ὅτι μόνο δύο ἔχουν τάξη 3. Ἀντιθέτως, παρατηρῆστε ὅτι ἡ A_4 ἔχει τουλάχιστον τρία στοιχεῖα τάξεως, γιὰ παράδειγμα, $(1\,2\,3), (1\,2\,4), (1\,3\,4)$. Ἐξ αὐτοῦ συμπεράνατε ὅτι οἱ ὁμάδες $\mathbb{Z}_3 \times V$ καὶ A_4 δὲν εἶναι ἰσόμορφες.

108. Ὑπολογῖστε τὶς ὁμάδες συμμετρίας τῶν ἑξῆς πολυωνυμικῶν παραστάσεων μὲ μεταβλητὲς a_1, a_2, a_3, a_4:

$$(\alpha')\ \ a_1^n + a_2^n + a_3^n + a_4^n \qquad (\beta')\ \ a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4,$$

$$(\gamma')\ \ a_1a_2 + a_4^3 \qquad (\delta')\ \ a_1a_2 + a_2^4$$

(Οἱ δύο τελευταῖες παραστάσεις δὲν περιέχουν τὴ μεταβλητὴ a_3, πλὴν ὅμως, θεωροῦνται ὡς παραστάσεις τῶν a_1, a_2, a_3, a_4.)

$$(\varepsilon')\ \ (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_2 - a_3)(a_2 - a_4)(a_3 - a_4)$$

Ἂν θεωρήσετε μία ὁποιαδήποτε ἀντιμετάθεση $(i\ j) \in S_4$, ἐξετᾶστε πῶς δρᾶ αὐτὴ στὴν τελευταία παράσταση.

Ἀπαντήσεις. (α′): S_4 (β′): S_4 (γ′): $\langle(1\,2)\rangle$ (δ′): $\langle(3\,4)\rangle$ (ε′): A_4.

Ἀναφορὲς

[1] Δ. Βάρσος, Δ. Δεριζιώτης, Γ. Εμμανουήλ, Μ. Μαλιάκας, Ο. Ταλέλλη, *Μια Εισαγωγή στην Άλγεβρα*, Γ′ Έκδοση Εκδόσεις ΣΟΦΙΑ, Αθήνα 2012.