Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Διάλεξη 7

Βάσεις – Διάσταση

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

7/3/2014

Βάσεις

Εάν ένα υποσύνολο S του διανυσματικού χώρου V παράγει το V, τότε κάθε στοιχείο του V εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του S.

Εάν επί πλέον το σύνολο S είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε αυτός ο γραμμικός συνδυασμός είναι μοναδικός για κάθε στοιχείο του V.

Γι' αυτό το λόγο ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο που παράγει ένα χώρο V έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Βάσεις (2)

Ορισμός. Ένα υποσύνολο $\mathcal{B}$ του διανυσματικού χώρου V λέγεται **βάση** του V εάν το $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και παράγει το διανυσματικό χώρο V.

Μία βάση ενός διανυσματικού χώρου V χαρακτηρίζεται ως ένα μέγιστο γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του V, και επίσης ως ένα ελάχιστο παράγον σύνολο του V.

Βάσεις (3)

Πρόταση

Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο V, και ένα σύνολο $\{v_1, \dots v_n\} \subseteq V$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

1. $\{v_1, \dots, v_n\}$ *είναι βάση του V, δηλαδή είναι γραμμικά ανεξάρτητο παράγον σύνολο του V.*
2. *Κάθε διάνυσμα $w \in V$ εκφράζεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \dots, v_n$.*
3. $\{v_1, \dots, v_n\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο, αλλά για κάθε $w \in V \setminus \{v_1, \dots, v_n\}$, το σύνολο $\{v_1, \dots, v_n\} \cup \{w\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο.*
4. $\{v_1, \dots, v_n\}$ *είναι παράγον σύνολο V, ενώ για κάθε $i = 1, \dots, n$, το σύνολο $\{v_1, \dots, v_n\} \setminus \{v_i\}$ δεν παράγει το V.*

Θεώρημα Αντικατάστασης

Το επόμενο αποτέλεσμα λέει οτι

- ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο δεν μπορεί να έχει περισσότερα στοιχεία από ένα σύνολο που παράγει το χώρο,
- μπορούμε να αντικαταστήσουμε κάποια από τα στοιχεία του παράγοντος συνόλου με τα στοιχεία του γραμμικά ανεξάρτητου συνόλου ώστε να έχουμε ένα νέο παράγον σύνολο που περιέχει το γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο.

Θεώρημα Αντικατάστασης (2)

Θεώρημα (Θεώρημα Αντικατάστασης)

Εάν το πεπερασμένο σύνολο $\{v_1, \dots, v_n\}$ παράγει το γραμμικό χώρο V, και $\{w_1, \dots, w_k\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του V, τότε

1. *$k \leq n$ και*
2. *υπάρχουν $n-k$ στοιχεία v_{i_j}, για $j = 1, \dots, n-k$ τέτοια ώστε*

$$\{w_1, \dots, w_k, v_{i_1}, \cdots, v_{i_{n-k}}\}$$

   παράγουν το V.

Ιδιότητες βάσεων

Πόρισμα

Ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο σε ένα διανυσματικό χώρο δεν μπορεί να έχει περισσότερα στοιχεία από ένα σύνολο που παράγει το χώρο.

Πόρισμα

Εάν $\mathcal{B}$ και $\mathcal{B}'$ είναι βάσεις ενός πεπερασμένα παραγόμενου διανυσματικού χώρου, τότε $\mathcal{B}$ και $\mathcal{B}'$ έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων.

Ιδιότητες βάσεων (2)

Πρόταση

Εάν ο διανυσματικός χώρος V παράγεται από το πεπερασμένο σύνολο S, και F είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του S, τότε υπάρχει μία βάση $\mathcal{B}$ του V τέτοια ώστε

$$F \subseteq \mathcal{B} \subseteq S\,.$$

Θεώρημα

Κάθε διανυσματικός χώρος V περιέχει μία βάση. Ειδικότερα, κάθε γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο του V μπορεί να επεκταθεί σε μία βάση του χώρου V, και κάθε σύνολο που παράγει το διανυσματικό χώρο V περιέχει μία βάση του V.

Διάσταση

Ορισμός. Έστω διανυσματικός χώρος V. Η **διάσταση** του V συμβολίζεται $\dim V$ και ορίζεται ως εξής:

$$\dim V = \begin{cases} 0 & \text{εάν } V = \{0\} \\ n & \text{εάν υπάρχει βάση του } V \text{ με } n \text{ στοιχεία} \\ \infty & \begin{array}{l}\text{εάν για κάθε } m \in \mathbb{N}, \text{ υπάρχει γραμμικά} \\ \text{ανεξάρτητο υποσύνολο του } V \text{ με } m \text{ στοιχεία}\end{array} \end{cases}$$

Λέμε οτι ο διανυσματικός χώρος V έχει **πεπερασμένη διάσταση** εάν $\dim V \in \mathbb{N}_0$, ενώ ονομάζουμε **απειροδιάστατο** ένα χώρο για τον οποίο $\dim V = \infty$.

Διάσταση (2)

Θεώρημα

Έστω διανυσματικός χώρος V διάστασης n, και S υποσύνολο του V με n στοιχεία. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. *S είναι γραμμικά ανεξάρτητο στο V.*
2. *S παράγει το διανυσματικό χώρο V.*
3. *S είναι βάση του V.*

Διάσταση (3)

Πρόταση

Έστω διανυσματικός χώρος V *διάστασης* n, *και* $\{v_1, \dots, v_n\}$ *βάση του* V. *Εάν* $\{w_1, \dots, w_k\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του* V, *τότε υπάρχουν* $n - k$ *στοιχεία* v_{i_j}, *για* $j = 1, \dots, n-k$, *τέτοια ώστε*

$$\{w_1, \dots, w_k, v_{i_1}, \dots, v_{i_{n-k}}\}$$

είναι βάση του V.

Διάσταση (4)

Πρόταση

Κάθε γραμμικός υπόχωρος X ένος διανυσματικού χώρου V πεπερασμένης διάστασης έχει πεπερασμένη διάσταση και

$$\dim X \leq \dim V\,.$$

Εάν $\dim X = \dim V$, *τότε* $X = V$.

Διάσταση (5)

Πρόταση

Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πεπερασμένης διάστασης, και γραμμικούς υπόχωρους X και Y. Τότε ισχύει η σχέση

$$\dim(X+Y)=\dim X+\dim Y-\dim(X\cap Y).$$

Πόρισμα

Το άθροισμα των γραμμικών υπόχωρων $X+Y$ είναι ευθύ εάν και μόνον εάν

$$\dim X+Y=\dim X+\dim Y\,.$$

Συμπληρωματικός υπόχωρος

Πρόταση

Έστω διανυσματικός χώρος V πεπερασμένης διάστασης. Εάν X είναι υπόχωρος του V, υπάρχει υπόχωρος Y του V, τέτοιος ώστε

$$V = X \oplus Y\,.$$

Όταν X και Y είναι υπόχωροι του V, και $V = X \oplus Y$, λέμε οτι ο Y είναι **συμπληρωματικός υπόχωρος** του X στον V.