



**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ**

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Υποδείξεις Άσκησης 3

Γιώργος Τζιρίτας

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
Εφαρμοσμένα μαθηματικά για μηχανικούς

Άνοιξη 2015

Γ. Τζιρίτας, Καθηγητής

3^η σειρά ασκήσεων

Απαντήσεις

1. Αφού αποδειχθεί ότι

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-a} \right), \quad a \neq b$$

να βρεθεί το ολοκλήρωμα

$$\oint_{|z|=\rho} \frac{dz}{(z-a)(z-b)},$$

για την περίπτωση: α) $0 < \rho < \min(|a|, |b|)$, β) $\min(|a|, |b|) < \rho < \max(|a|, |b|)$ και γ) $\max(|a|, |b|) < \rho$.

Απαντήσεις

Θέτουμε $\varrho_1 = \min(|a|, |b|)$ και $\varrho_2 = \max(|a|, |b|)$.

α) Επειδή η συνάρτηση είναι αναλυτική πάνω και στο εσωτερικό του κύκλου όπου λαμβάνεται το ολοκλήρωμα,

$$\oint_{|z|=\rho} \frac{dz}{(z-a)(z-b)} = 0.$$

β)

$$\oint_{|z|=\rho} \frac{dz}{(z-a)(z-b)} = \frac{2\pi i}{\varrho_1 - \varrho_2},$$

όπου

$$\varrho_1 - \varrho_2 = \begin{cases} b-a, & |b| < |a| \\ a-b, & |a| < |b| \end{cases}$$

γ) Επειδή τα δύο ολοκληρώματα, μετά την ανάλυση σε μερικά κλάσματα, είναι ίσα και αλληλοαναιρούνται,

$$\oint_{|z|=\rho} \frac{dz}{(z-a)(z-b)} = 0.$$

2. Να βρεθεί το ανάπτυγμα της συνάρτησης

$$\frac{z^2}{(z-a)(z-b)}, \quad a \neq b,$$

σε δυναμοσειρά για την περίπτωση: α) $0 < |z| < \min(|a|, |b|)$, β) $\min(|a|, |b|) < |z| < \max(|a|, |b|)$ και γ) $\max(|a|, |b|) < |z|$.

Απαντήσεις

α)

$$\frac{z^2}{(z-a)(z-b)} = \frac{z^2}{b-a} \left(\frac{1}{a-z} - \frac{1}{b-z} \right) = \frac{z}{b-a} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{a^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{b^n} \right)$$

β) Για $|b| < |a|$

$$\frac{z^2}{(z-a)(z-b)} = \frac{z}{b-a} \left(\frac{z}{a-z} + \frac{z}{z-b} \right) = \frac{z}{b-a} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{a^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{z^n} \right)$$

γ)

$$\frac{z^2}{(z-a)(z-b)} = \frac{z}{b-a} \left(\frac{z}{z-b} - \frac{z}{z-a} \right) = \frac{z}{b-a} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^n} \right) = \frac{1}{b-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{z^n}$$

3. Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση stem του MATLAB δώστε τη γραφική παράσταση των ακόλουθων σημάτων για $0 \leq n \leq 31$

- $x_1(n) = \sin \frac{\pi n}{4} \cos \frac{\pi n}{4},$
- $x_2(n) = \cos^2 \frac{\pi n}{4},$
- $x_3(n) = \sin \frac{\pi n}{4} \cos \frac{\pi n}{8},$
- $x_4(n) = \sin \frac{n}{4} + \cos \frac{\pi n}{8}.$

Ποιά από αυτά τα σήματα είναι περιοδικά και ποιά είναι η θεμελιώδης περίοδος;

Απαντήσεις

- (a) $N_0 = 4$
- (b) $N_0 = 4$
- (c) $N_0 = 16$
- (d) Δεν είναι περιοδικό.

4. Δίδεται το μιγαδικό σήμα

$$z(t) = \frac{1+i}{\sqrt{2}} e^{0.25\pi - (0.25+i2\pi)t}.$$

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση ezplot του MATLAB δώστε τη γραφική παράσταση των ακόλουθων σημάτων: $\Re z(t), \Im z(t), |z(t)|, \angle z(t)$, για $0 \leq t \leq 10$.

Απάντηση

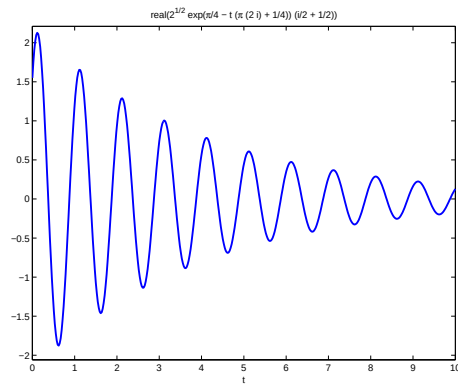
Για τη γωνία χρειάζεται να δοθούν τα δύο μέρη, όπως παρακάτω. Οι γραφικές παραστάσεις δίδονται στην επόμενη σελίδα.

```
clear all; close all;  
syms t;
```

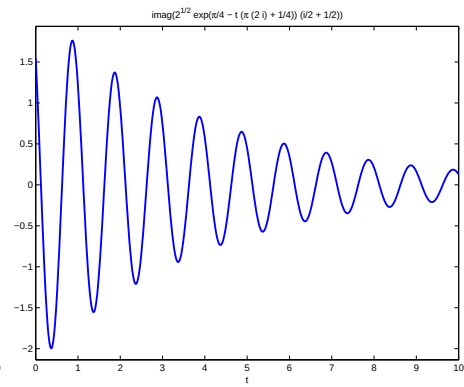
```
z = (1+1i)/sqrt(2)*exp(0.25*pi -(0.25+1i*2*pi)*t);
```

```
figure;
```

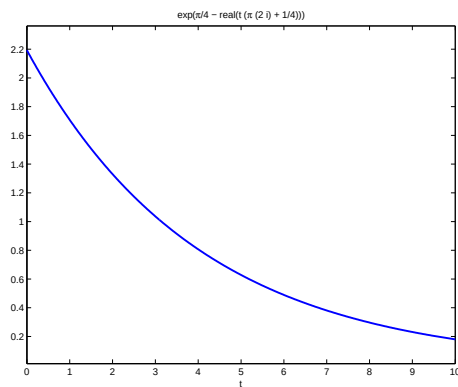
```
ezplot(sym('atan2(exp(-0.25*pi*t)*cos(2*pi*t+0.25*pi),...  
-exp(-0.25*pi*t)*sin(2*pi*t+0.25*pi))'), [0 10]);
```



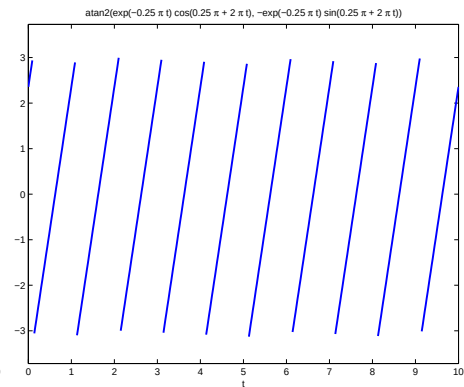
(a)



(b)



(c)



(d)

Σχήμα 1: Άνω αριστερά : πραγματικό μέρος. Άνω δεξιά : φανταστικό μέρος. Κάτω αριστερά : μέτρο. Κάτω δεξιά : όρισμα ή γωνία.

Τέλος Ενότητας



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Κρήτης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

Σημείωμα αδειοδότησης

- Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Μη Εμπορική Χρήση - Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

•Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

- Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Κρήτης, Γιώργος Τζιρίτας. «**Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς. Υποδείξεις Άσκησης 3**». Έκδοση: 1.0.
Ηράκλειο/Ρέθυμνο 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:
<http://www.csd.uoc.gr/~hy215/>