MEM 102 Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα

Διάλεξη 6

Γεωμετρικά αποτελέσματα

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Σεπ 2014

Απλός λόγος τριών σημείων

Θεωρούμε τρία σημεία P_1, P_2, P πάνω σε μία ευθεία. Τα διανύσματα $\overrightarrow{P_1P}$ και $\overrightarrow{PP_2}$ είναι συγγραμμικά, και εάν $P \neq P_2$ υπάρχει ένας αριθμός μ τέτοιος ώστε

$$\overrightarrow{P_1P} = \mu\overrightarrow{PP_2}.$$

Ο αριθμός μ ονομάζεται απλός λόγος των τριών σημείων, και συμβολίζεται $(P_1\,P_2\,P)$.

Παρατηρούμε οτι

$$(P_1\,P_2\,P) = \frac{(\overrightarrow{P_1P})}{(\overrightarrow{PP_2})},$$

και οτι η αλλαγή του προσανατολισμού της ευθείας δεν επηρεάζει τον απλό λόγο.

Εάν θεωρήσουμε τα P_1, P_2 σταθερά, με το P_1 στα αριστερά του P_2 και το P να κινείται πάνω στην ευθεία, η τιμή του απλού λόγου μεταβάλλεται

- όσο το P βρίσκεται αριστερά του P_1, ο απλός λόγος παίρνει τιμές μεταξύ -1 και 0.
- όταν $P = P_1$, ο απλός λόγος είναι 0.
- όταν το P βρίσκεται μεταξύ του P_1 και του P_2, ο απλός λόγος παίρνει τιμές μεταξύ 0 και $+\infty$.
- όταν $P = P_2$, ο απλός λόγος δεν ορίζεται.
- όταν το P βρίσκεται δεξιά του P_2, ο απλός λόγος παίρνει τιμές μεταξύ του $-\infty$ και του -1.

Εάν τα σημεία έχουν συντεταγμένες

$$P_1(x_1,\, y_1), \qquad P_2(x_2,\, y_2), \qquad P(x,\, y)\,,$$

γράφοντας την $(\overrightarrow{P_1 P}) = m(\overrightarrow{PP_2})$ σε συντεταγμένες έχουμε

$$x - x_1 = \mu(x_2 - x) \quad \textbf{και} \quad y - y_1 = \mu(y_2 - y)\,.$$

Από αυτές τις εξισώσεις προκύπτουν οι τύποι

$$x = \frac{x_1 + \mu x_2}{1 + \mu} \quad \textbf{και} \quad y = \frac{y_1 + \mu y_2}{1 + \mu}\,.$$

Όταν $\mu > 0$, το P βρίσκεται μεταξύ των P_1 και P_2, και οι τύποι δίδουν τις συντεταγμένες του σημείου που χωρίζει το διάστημα $P_1 P_2$ σε δύο τμήματα με λόγο $\mu : 1$.

Το σημείο τομής των διαμέσων τριγώνο

Θεωρούμε το τρίγωνο ABC, του οποίου οι κορυφές έχουν συντεταγμένες (a_1, a_2), (b_1, b_2) και (c_1, c_2) αντίστοιχα.

Τα μέσα των πλευρών BC, AC και AB είναι $A'(a'_1, a'_2)$, $B'(b'_1, b'_2)$ και $C'(c'_1, c'_2)$ αντίστοιχα.

Το σημείο $A'(a_1', a_2')$ διαιρεί το διάστημα BC σε λόγο 1:1, και από τους τύπους του απλού λόγου έχουμε τις συντεταγμένες του

$$a_1' = \frac{b_1 + c_1}{2}, \qquad a_2' = \frac{b_2 + c_2}{2}.$$

Παρόμοια για το $B'(b_1', b_2')$

$$b_1' = \frac{a_1 + c_1}{2}, \qquad b_2' = \frac{a_2 + c_2}{2}.$$

Ένα σημείο X πάνω στην ευθεία AA' έχει διάνυσμα θέσης

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \ell\overrightarrow{AA'}$$

για κάποιο πραγματικό αριθμό ℓ.

Παρόμοια, ένα σημείο Y πάνω στην ευθεία BB' έχει διάνυσμα θέσης

$$\overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{BB'}$$

για κάποιο πραγματικό αριθμό m.

Το σημείο τομής των AA' και BB' έχει διάνυσμα θέσης $\overrightarrow{OA} + \ell\overrightarrow{AA'}$ για κάποιο ℓ, και επίσης $\overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{BB'}$ για κάποιο m.

Δηλαδή υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί ℓ και m τέτοιοι ώστε

$$\overrightarrow{OA} + \ell\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{BB'}.$$

Αυτή η παρατήρηση μας επιτρέπει να βρούμε τους αριθμούς ℓ και m.

$$
\begin{aligned}
(b_1 + c_1 - 2a_1)\ell + (2b_1 - a_1 - c_1)m &= 2b_1 - 2a_1 \\
(b_2 + c_2 - 2a_2)\ell + (2b_2 - a_2 - c_2)m &= 2b_2 - 2a_2 \,.
\end{aligned}
$$

Τα διανύσματα $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ δεν είναι παράλληλα και συνεπώς οι συντελεστές της πρώτης εξίσωσης δεν είναι πολλαπλάσια των συντελεστών της δεύτερης εξίσωσης.

Άρα οι εξισώσεις έχουν μοναδική λύση, η οποία μπορούμε να επαληθεύσουμε οτι είναι

$$
\ell = \frac{2}{3}, \qquad m = \frac{2}{3}\,.
$$

Σημείο τομής των ευθειών AA' και BB' είναι το σημείο G το οποίο διαιρεί τα διαστήματα AA' και BB' σε λόγο $2:1$.

Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε οτι το σημείο τομής G' των AA' και CC' διαιρεί τα διαστήματα AA' και CC' σε λόγο $2:1$.

Αφού τα σημεία G και G' διαιρούν το διάστημα AA' στον ίδιο λόγο, συμπεραίνουμε οτι συμπίπτουν

$$G = G'.$$

Εύκολα υπολογίζουμε τις συντεταγμένες του σημείου $G(g_1, g_2)$.

Αφού $(AA'G) = 2$, από τους τύπους του διπλού λόγου έχουμε

$$
\begin{aligned}
g_1 &= \frac{a_1 + 2a_1'}{3} = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{3} \\
g_2 &= \frac{a_2 + 2a_2'}{3} = \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}
\end{aligned}
$$