ΜΕΜ 102 Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα
Διάλεξη 7
Αλλαγή συστήματος αναφοράς

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Οκτ 2014

Αλλαγή συστήματος αναφοράς

Θεωρούμε δύο διαφορετικά ορθοκανονικά συστήματα αναφοράς στο επίπεδο, $(O, \vec{i}, \vec{j})$ και $(P, \vec{u}, \vec{v})$.

Ένα βασικό πρόβλημα σε αυτήν την περίπτωση είναι να βρούμε τις συντεταγμένες ενος σημείου ως προς το σύστημα $(P, \vec{u}, \vec{v})$ εάν γνωρίζουμε τις συντεταγμένες του ως προς το σύστημα $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Θεωρούμε ένα σημείο A στο επίπεδο, με συντεταγμένες $(x,\, y)$ ως προς το $(O,\, \vec{i},\, \vec{j})$ και $(x',\, y')$ ως προς το $(P,\, \vec{u},\, \vec{v})$.

Αυτό σημαίνει ότι

$$\overrightarrow{OA} = x\vec{i} + y\vec{j} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{PA} = x'\vec{u} + y'\vec{v}\,.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP}\,,$$

και εάν οι συντεταγμένες του P ως προς το $(O,\, \vec{i},\, \vec{j})$ είναι $(p,\, q)$, τότε

$$x'\vec{u} + y'\vec{v} = (x-p)\vec{i} + (y-q)\vec{j} \tag{1}$$

Απομένει να βρούμε τη σχέση ανάμεσα στα ελεύθερα διανύσματα $\vec{i}$, $\vec{j}$ και $\vec{u}$, $\vec{v}$.

Θεωρούμε αντιπροσώπους των $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ στο ίδιο σημείο εφαρμογής.

Επειδή και τα δύο συστήματα είναι ορθογώνια, η προσημασμένη γωνία $\vartheta = \measuredangle(\vec{i}, \vec{u})$ είναι ίση με τη γωνία $\measuredangle(\vec{j}, \vec{v})$, και

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \cos\vartheta\,\vec{i} + \sin\vartheta\,\vec{j} \\ \vec{v} &= -\sin\vartheta\,\vec{i} + \cos\vartheta\,\vec{j} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην (1), έχουμε

$$x'(\cos\vartheta\,\vec{i}+\sin\vartheta\,\vec{j})+y'(-\sin\vartheta\,\vec{i}+\cos\vartheta\,\vec{j})=(x-p)\vec{i}+(y-q)\vec{j}$$

Εξισώνουμε τους συντελεστές του $\vec{i}$ και του $\vec{j}$, και έχουμε

$$\begin{aligned} x'\cos\vartheta - y'\sin\vartheta &= x-p \\ x'\sin\vartheta + y'\cos\vartheta &= y-q\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Εάν λύσουμε το σύστημα ως προς x' και y', έχουμε

$$\begin{aligned} x' &= (x-p)\cos\vartheta + (y-q)\sin\vartheta \\ y' &= -(x-p)\sin\vartheta + (y-q)\cos\vartheta\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Οι εξισώσεις (2) δίδουν τις συντεταγμένες (x, y) συναρτήσει των x', y', p και q, ενώ οι εξισώσεις (3) δίδουν τις συντεταγμένες (x', y') συναρτήσει των x, y, p και q.