ΜΕΜ 102 Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα

Διάλεξη 8

Γεωμετρικά Διανύσματα στο Χώρο

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Οκτ 2014

Γεωμετρικά Διανύσματα στο Χώρο

Ένα γεωμετρικό διάνυσμα στο χώρο είναι ένα βέλος, ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα, δηλαδή ένα ευθύγραμμο τμήμα στο χώρο E^3, πάνω στο οποίο διακρίνουμε τα δύο άκρα, και ονομάζουμε το ένα αρχή και το άλλο πέρας.

Για γεωμετρικά διανύσματα στο χώρο ορίζουμε το μέτρο και τον φορέα όπως και για διανύσματα στο επίπεδο. Ονομάζουμε παράλληλα τα διανύσματα που έχουν τον ίδιο φορέα ή παράλληλους φορείς.

Παραλληλόγραμμα στο χώρο

Ορισμός. Ένα σχήμα που αποτελείται από τέσσερα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα AB, BC, CD και DA στο χώρο, ονομάζεται παραλληλόγραμμο εάν το μέσο M του διαστήματος AC συμπίπτει με το μέσο του BD. Αυτό το παραλληλόγραμμο το συμβολίζουμε $ABCD$.

Εύκολα δείχνουμε οτι οι τέσσερεις κορυφές ενός παραλληλογράμμου βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο στο χώρο.

Και για παραλληλόγραμμα στο χώρο ισχύει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση

Εάν τα σχήματα $ABCD$ και $CDEF$ είναι παραλληλόγραμμα, τότε παραλληλόγραμμο είναι και το σχήμα $ABFE$.

Παράλληλη μεταφορά και ισοδυναμία διανυσμάτων

Ορισμός. Θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, και ένα σημείο A' του χώρου. Λέμε οτι το διάνυσμα $\overrightarrow{A'B'}$ προκύπτει με παράλληλη μεταφορά του $\overrightarrow{AB}$ στο A', εάν το σημείο B' είναι τέτοιο ώστε $ABB'A'$ είναι παραλληλόγραμμο.

Εαν το διάνυσμα $\overrightarrow{CD}$ προκύπτει από το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ με παράλληλη μεταφορά, λέμε οτι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{CD}$ είναι ισοδύναμα, και γράφουμε

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}\,.$$

Όλα τα μηδενικά διανύσματα είναι ισοδύναμα μεταξύ τους.

Πράξεις με διανύσματα στο χώρο

Ορισμός. Εάν $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ και $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ είναι διανύσματα στο E^3 με σημείο εφαρμογής το O, ορίζουμε το άθροισμα $\vec{u} + \vec{v}$ να είναι το γεωμετρικό διάνυσμα με αρχή στο O και πέρας στο σημείο C για το οποίο $OACB$ είναι παραλληλόγραμμο.

Ορισμός. Εάν $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ είναι διάνυσμα στο E^3 και a είναι πραγματικός αριθμός, $a \in \mathbb{R}$, ορίζουμε το γινόμενο $a\,\vec{u}$ να είναι το διάνυσμα με σημείο εφαρμογής O, μήκος $|a|\,|\vec{u}|$ και την ίδια διεύθυνση με το $\vec{u}$ ($|a|$ είναι η απόλυτη τιμή του a).

Η φορά του $a\vec{u}$ είναι η ίδια με αυτήν του $\vec{u}$ εάν $a > 0$, και η αντίθετη εάν $a < 0$.

Ιδιότητες πράξεων

Οι πράξεις με διανύσματα στο χώρο έχουν τις ίδιες ιδιότητες με την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό με αριθμό διανυσμάτων στο επίπεδο. Για τις αποδείξεις, αρκεί να ερμηνεύσουμε τα σχήματα στο χώρο.

Για παράδειγμα, στην απόδειξη της προσεταιριστικής ιδιότητας για την πρόσθεση διανυσμάτων στο χώρο,

$$(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}),$$

τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ και $\overrightarrow{OC}$ αποτελούν τις ακμές ενός παραλληλεπιπέδου.

Οι πράξεις είναι συμβατές με την παράλληλη μεταφορά στο χώρο. Εάν $\overrightarrow{OA} \sim \overrightarrow{O'A'}$ και $\overrightarrow{OB} \sim \overrightarrow{O'B'}$ τότε

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \sim \overrightarrow{O'A'} + \overrightarrow{O'B'}.$$

Γραμμικοί συνδυασμοί διανυσμάτων στο χώρο

Πρόταση

Εάν τα διανύσματα $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ και $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$ δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, τότε για κάθε διάνυσμα $\vec{z}$ του χώρου, με αρχή στο O, $\vec{z} = \overrightarrow{OD}$, υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί a, b, $c \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\vec{z} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}.$$

Συμπεραίνουμε οτι κάθε συλλογή που περιέχει περισσότερα από τρία διανύσματα στο χώρο, είναι γραμμικά εξαρτημένη.

Παρατηρούμε οτι τρία διανύσματα με κοινό σημείο εφαρμογής στο χώρο, τα οποία δεν περιέχονται σε ένα επίπεδο είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Προβολή και εσωτερικό γινόμενο

Θεωρούμε δύο μη μηδενικά διανύσματα στο χώρο, $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ και $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. Η ορθογώνια προβολή του $\vec{u}$ στο $\vec{v}$, $\mathrm{pr}_{\vec{v}}\vec{u}$, και το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ορίζονται όπως και για διανύσματα του επιπέδου:

- $\mathrm{pr}_{\vec{v}}\vec{u} = \overrightarrow{OA'}$, όπου A' είναι το σημείο στο οποίο η κάθετος από το A τέμνει την ευθεία OB,
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|(\mathrm{pr}_{\vec{v}}\vec{u})$, όπου η αλγεβρική τιμή $(\mathrm{pr}_{\vec{v}}\vec{u})$ είναι ως προς τον προσανατολισμό της OB που ορίζει το διάνυσμα $\vec{v}$.

Γωνία μεταξύ διανυσμάτων στο χώρο

Η γωνία $\angle(\vec{u}, \vec{v})$ μεταξύ δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{u} = \vec{OA}$ και $\vec{v} = \vec{OB}$ ορίζεται ως η κυρτή γωνία $\widehat{AOB}$ στο επίπεδο που ορίζουν τα σημεία O, A, B.

Η προσημασμένη γωνία για δύο διανύσματα στο χώρο δεν ορίζεται, επειδή δεν είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε τον προσανατολισμό του επιπέδου που περιέχει τα διανύσματα με κανονικό τρόπο για όλα τα επίπεδα του χώρου.