ΜΕΜ 102 Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα

Διάλεξη 9
Εξωτερικό Γινόμενο

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Οκτ 2014

Το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ και $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, και το παραλληλόγραμμο με πλευρές OA και OB, $OADB$.

Το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου είναι ένας θετικός αριθμός, ο οποίος εξαρτάται από τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$, και τη γωνία μεταξύ τους.

Μπορούμε να ορίσουμε μία πράξη η οποία, στο ζεύγος διανυσμάτων $\vec{u}$, $\vec{v}$ αντιστοιχεί το εμβαδόν $|OADB|$ του παραλληλογράμμου $OADB$.

Όμως αυτή η πράξη δεν έχει την επιμεριστική ιδιότητα ως προς την πρόσθεση.

Εάν $\overrightarrow{OC}$ είναι ένα τρίτο διάνυσμα και $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, η επιμεριστικότητα θα σήμαινε οτι το άθροισμα των εμβαδών των παραλληλογράμμων $OADB$ και $OAEC$ θα ήταν ίσο με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $OAFG$,

$$|OADB| + |OAEC| = |OAFG|\,.$$

Αυτό δεν ισχύει πάντα.

Προσανατολισμός επιπέδου

Θεωρούμε ένα επίπεδο Π που περιέχει το σημείο αναφοράς O, και μία ευθεία κ η οποία περνάει από το O και είναι κάθετη στο επίπεδο Π.

Τα μη μηδενικά διανύσματα με φορέα την κ διακρίνονται σε δύο κατηγορίες, ανάλογα με τη φορά τους. Επιλέγουμε ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\overrightarrow{ON}$, με φορέα κ.

Ορισμός. Ο προσανατολισμός του επιπέδου Π που αντιστοιχεί στο $\overrightarrow{ON}$ είναι η φορά περιστροφής του επιπέδου που προσδιορίζουν τα δάκτυλα του δεξιού χεριού, όταν ο αντίχειρας δείχνει στην κατεύθυνση του $\overrightarrow{ON}$.

Προσανατολισμός και διάταξη

Ο προσανατολισμός του επιπέδου Π που αντιστοιχεί σε οποιοδήποτε διάνυσμα ομόρροπο με το $\overrightarrow{ON}$ είναι ο ίδιος με αυτόν που αντιστοιχεί στο $\overrightarrow{ON}$, ενώ ο προσανατολισμός που αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα αντίρροπο προς το $\overrightarrow{ON}$ είναι αντίθετος.

Μία διάταξη στο ζεύγος μη συγγραμμικών διανυσμάτων $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ επίσης προσδιορίζει ένα προσανατολισμό στο επίπεδο Π: τη φορά περιστροφής του επιπέδου η οποία μεταφέρει το διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$ σε ένα διάνυσμα ομόρροπο με το $\overrightarrow{OB}$, μετά από στροφή κατά κυρτή γωνία ϑ, με $0 < \vartheta < \pi$.

Η αντίθετη διάταξη των διανυσμάτων, $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$, προσδιορίζει τον αντίθετο προσανατολισμό.

Δεξιόστροφο σύστημα

Στο διατεταγμένο ζεύγος μη συγγραμμικών διανυσμάτων $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ αντιστοιχεί μία φορά πάνω στην κάθετο κ: η φορά των διανυσμάτων που αντιστοιχούν στον προσανατολισμό του επιπέδου που προσδιορίζει το διατεταγμένο ζεύγος $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

Όταν ο προσανατολισμός του επιπέδου Π που προσδιορίζει το διατεταγμένο ζεύγος $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ συμπίπτει με τον προσανατολισμό που προσδιορίζει το κάθετο στο επίπεδο διάνυσμα $\overrightarrow{ON}$, λέμε ότι η διατεταγμένη τριάδα $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{ON})$ αποτελεί ένα δεξιόστροφο σύστημα,

Εξωτερικό γινόμενο

Θεωρούμε το διάνυσμα $\overrightarrow{OX}$ το οποίο έχει φορέα τον κ, φορά αυτήν που προσδιορίζεται από την διάταξη $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, και μέτρο ίσο με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με ακμές OA, OB.

Ορίζουμε το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ να είναι το διάνυσμα

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{cases} \overrightarrow{OO} & \text{εάν τα } \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \text{ είναι συγγραμικά} \\ \overrightarrow{OX} & \text{εάν τα } \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \text{ δεν είναι συγγραμικά.} \end{cases}$$

Ιδιότητες εξωτερικού γινομένου

Πρόταση

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ με κοινό σημείο εφαρμογής O, και το αριθμό a. Τότε

1. $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$
2. $(a\,\vec{x}) \times \vec{y} = a(\vec{x} \times \vec{y})$
3. $\vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} \times \vec{y}) + (\vec{x} \times \vec{z})$