# ΜΕΜ 102 Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα

## Διάλεξη 10

## Συντεταγμένες στο χώρο

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Οκτ 2014

# Σύστημα αναφοράς

Στο χώρο $E^3$ θεωρούμε ένα σημείο $O$, και τρία διανύσματα με σημείο εφαρμογής το $O$, τα οποία δεν περιέχονται στο ίδιο επίπεδο, $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, $w = \overrightarrow{OC}$.

Τα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ προσδιορίζουν τρείς άξονες, $(\varepsilon,\ \vec{u})$, $(\delta,\ \vec{v})$, $(\zeta,\ \vec{w})$, οι οποίοι τέμνονται στο $O$.

Η διατεταγμένη τριάδα αξόνων $(\varepsilon,\ \vec{u})$, $(\delta,\ \vec{v})$, $(\zeta,\ \vec{w})$ ονομάζεται σύστημα αναφοράς στο χώρο και θα το συμβολίζουμε $(O, \vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w})$.

# Συντεταγμένες

Οποιοδήποτε διάνυσμα στο χώρο $\vec{z}$ με σημείο εφαρμογής στο $O$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός

$$\vec{z} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}\,.$$

Οι αριθμοί της διατεταγμένης τριάδας $(a,\ b,\ c)$ ονομάζονται συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{z}$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O,\ \vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w})$.

Τα διανύσματα $a\vec{u}$, $b\vec{v}$, $c\vec{w}$ ονομάζονται συνιστώσες του $\vec{z}$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O,\ \vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w})$.

Για κάθε σημείο $D$ του χώρου, το διάνυσμα $\overrightarrow{OD}$ ονομάζεται διάνυσμα θέσης (ή διανυσματική ακτίνα) του $D$, και οι συντεταγμένες του $\overrightarrow{OD}$ είναι οι συντεταγμένες του σημείου $D$.

# Ταύτιση του $E^3$ με το $\mathbb{R}^3$

Η επιλογή ενός συστήματος αναφοράς προσδιορίζει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των σημείων του $E^3$ και των διατεταγμένων τριάδων πραγματικών αριθμών, $\mathbb{R}^3$,

$$E^3 \longleftrightarrow \mathbb{R}^3 .$$

Σε αυτή την αντιστοιχία βασίζεται η μελέτη των γεωμετρικών αντικειμένων του χώρου, όπως ευθείες, επίπεδα, καμπύλες και επιφάνειες, χρησιμοποιώντας την άλγεβρα των πραγματικών αριθμων.

# Ορθοκανονικά συστήματα συντεταγμένων

Θα περιορίσουμε την προσοχή μας σε ορθοκανονικά, δεξιόστροφα συστήματα συντεταγμένων, δηλαδή συστήματα συντεταγμένων $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ στα οποία

- Τα διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ έχουν μέτρο 1,

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1\,,$$

- Είναι κάθετα μεταξύ τους,

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0\,,$$

- Η διατεταγμένη τριάδα $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ αποτελεί δεξιόστροφο σύστημα διανυσμάτων.

# Συντεταγμένες σε ορθοκανονικό σύστημα

Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{z}$ δίδονται από τα εσωτερικά γινόμενα του $\vec{z}$ με τα διανύσματα του συστήματος:

$$\vec{z} = (\vec{z} \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{z} \cdot \vec{j})\vec{j} + (\vec{z} \cdot \vec{k})\vec{k}\,,$$

και το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων δίδεται από το άθροισμα των γινομένων των αντίστοιχων συντεταγμένων.

Εάν $\vec{z} = z_1\vec{i} + z_2\vec{j} + z_3\vec{k}$ και $\vec{y} = y_1\vec{i} + y_2\vec{j} + y_3\vec{k}$, τότε

$$\vec{z} \cdot \vec{y} = z_1 y_1 + z_2 y_2 + z_3 y_3$$

και

$$|\vec{z}| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}\,.$$

# Συντεταγμένες του εξωτερικού γινομένου

Θα υπολογίσουμε τις συντεταγμένες του εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων ως προς ένα ορθοκανονικό, δεξιόστροφο σύστημα αναφοράς.

Εάν $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ είναι ορθοκανονικό και δεξιόστροφο, το παραλληλόγραμμο που προσδιορίζουν τα $\vec{i}$, $\vec{j}$ είναι ορθογώνιο, με εμβαδόν 1, και ισχύει η σχέση

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} = -\vec{j} \times \vec{i}\,.$$

Ανάλογα έχουμε

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} = -\vec{k} \times \vec{j}$$

και

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} = -\vec{i} \times \vec{k}\,.$$

Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα στο γινόμενο

$$\vec{z} \times \vec{y} = (z_1\vec{i} + z_2\vec{j} + z_3\vec{k}) \times (y_1\vec{i} + y_2\vec{j} + y_3\vec{k})$$

και έχουμε

$$\begin{aligned}
&= z_1y_1\vec{i} \times \vec{i} + z_1y_2\vec{i} \times \vec{j} + z_1y_3\vec{i} \times \vec{k} \\
&\quad + z_2y_1\vec{j} \times \vec{i} + z_2y_2\vec{j} \times \vec{j} + z_2y_3\vec{j} \times \vec{k} \\
&\quad + z_3y_1\vec{k} \times \vec{i} + z_3y_2\vec{k} \times \vec{j} + z_3y_3\vec{k} \times \vec{k} \\
&= z_1y_1\overrightarrow{OO} + z_1y_2\vec{k} - z_1y_3\vec{j} \\
&\quad - z_2y_1\vec{k} + z_2y_2\overrightarrow{OO} + z_2y_3\vec{i} \\
&\quad + z_3y_1\vec{j} - z_3y_2\vec{i} + z_3y_3\overrightarrow{OO},
\end{aligned}$$

και τελικά

$$\vec{z} \times \vec{y} = (z_2 y_3 - z_3 y_2)\vec{i} + (z_3 y_1 - z_1 y_3)\vec{j} + (z_1 y_2 - z_2 y_1)\vec{k}\,.$$