ΜΕΜ 102 Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα

Διάλεξη 27

Απαλοιφή σε σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Νοε 2014

Σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους

Η περίπτωση συστημάτων m εξισώσεων με n αγνώστους για $m \neq n$, λύνεται πάλι με απαλοιφή, εμφανίζονται όμως περισσότερες δυνατότητες.

Εξετάζουμε, με ένα συγκεκριμένο παράδειγμα, τη διαδικασία της απαλοιφής σε ένα σύστημα 3 εξισώσεων με 4 αγνώστους:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} u & + & 3v & + & 3y & + & 2z & = & b_1 \\ 2u & + & 6v & + & 9y & + & 5z & = & b_2 \\ -u & - & 3v & + & 3y & & & = & b_3\,. \end{array}$$

Απαλοιφή σε $m \times n$ πίνακα

Για να λύσουμε το σύστημα κάνουμε απαλοιφή στον επεκτεταμένο πίνακα,

$$[A \vdots b] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & \vdots & b_1 \\ 2 & 6 & 9 & 5 & \vdots & b_2 \\ -1 & -3 & 3 & 0 & \vdots & b_3 \end{bmatrix}.$$

Αρχικά θα εξετάσουμε την απαλοιφή στον πίνακα των συντελεστών,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Στην πρώτη γραμμή έχουμε μη μηδενικό στοιχείο στην πρώτη στήλη, το οποίο χρησιμοποιούμε ως οδηγό.

Αφαιρούμε δύο φορές την πρώτη γραμμή από τη δεύτερη, και προσθέτουμε την πρώτη γραμμή στην τρίτη:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Στη δεύτερη στήλη δεν υπάρχει μη μηδενικό στοιχείο κάτω από την πρώτη γραμμή, άρα δεν μπορούμε να βρούμε οδηγό με εναλλαγή γραμμών.

Συνεχίζουμε στην τρίτη στήλη, όπου υπάρχει μη μηδενικό στοιχείο στη δεύτερη γραμμή, ο δεύτερος οδηγός.

Αφαιρούμε δύο φορές τη δεύτερη γραμμή από την τρίτη:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Στην τέταρτη στήλη δεν υπάρχει οδηγός.

Στη γενική περίπτωση μπορεί να χρειάζεται να κάνουμε εναλλαγή γραμμών για να φέρουμε ένα μη μηδενικό στοιχείο στη θέση του οδηγού.

Κλιμακωτή μορφή

Καταλήγουμε σε ένα πίνακα με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά.

- Οι γραμμές με μή μηδενικά στοιχεία (εάν υπάρχουν) εμφανίζονται πάνω από τις γραμμές που έχουν μόνο μηδενικά στοιχεία (εάν υπάρχουν).
- Το πρώτο μή μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής (εάν υπάρχει) ονομάζεται **οδηγός**. Ο οδηγός κάθε μη μηδενικής γραμμής βρίσκεται στα δεξιά του οδηγού της προηγούμενης γραμμής.

Λέμε οτι ένας πίνακας με αυτά τα χαρακτηριστικά έχει κλιμακωτή μορφή.

Ένας πίνακας σε κλιμακωτή μορφή, με r μή μηδενικές γραμμές, έχει r οδηγούς, στις θέσεις $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{rj_r}$.
Όλες οι συνιστώσες αριστερά και κάτω από τους οδηγούς είναι μηδέν.
Όλες οι γραμμές μετά τις r πρώτες είναι μηδενικές.

$$\begin{bmatrix}
0 & \cdots & 0 & a_{1j_1} & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{2j_2} & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\
\vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{rj_r} & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{bmatrix}$$

Παραγοντοποίηση LU

Γνωρίζουμε οτι κάθε βήμα της απαλοιφής μπορεί να πραγματοποιηθεί με πολλαπλασιασμό με ένα στοιχειώδη τετραγωνικό πίνακα ή με ένα πίνακα μετάθεσης.

$$E_{32}E_{31}E_{21}A =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U\,.$$

Οι στοιχειώδεις πίνακες είναι αντιστρέψιμοι, και έχουμε

$$A = E_{21}^{-1} E_{31}^{-1} E_{32}^{-1} U\,.$$

Θέτουμε $L = E_{21}^{-1} E_{31}^{-1} E_{32}^{-1}$,

$$\begin{aligned} L &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{2} & 1 & 0 \\ -\mathbf{1} & \mathbf{2} & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε οτι ο πίνακας L είναι κάτω τριγωνικός, με 1 στη διαγώνιο και τους πολλαπλασιαστές λ_{21}, λ_{31} και λ_{32} κάτω από τη διαγώνιο.

Εναλλαγές γραμμών

Στη γενική περίπτωση, σε ένα $m \times n$ πίνακα, μπορεί να χρειαστεί να κάνουμε και εναλλαγές γραμμών, συνεπώς

$$U = L_r P_r L_{r-1} P_{r-1} \cdots L_1 P_1 A \,,$$

όπου $P_1, \ldots, P_r$ είναι πίνακες μετάθεσης για τις γραμμές για τις οποίες χρειάζεται εναλλαγή και ο ταυτοτικός πίνακας στις περιπτώσεις που δεν χρειάζεται εναλλαγή, ενώ $L_1, \ldots, L_r$ είναι οι κάτω τριγωνικοί πίνακες που κάνουν την απαλοιφή των συνιστωσών του πίνακα κάτω από κάθε οδηγό.

Μπορούμε να υποθέσουμε οτι κάνουμε όλες τις απαραίτητες εναλλαγές στην αρχή της διαδικασίας, έτσι ώστε όταν αρχίσουμε την απαλοιφή να μην χρειάζονται άλλες εναλλαγές γραμμών.

Εάν συμβολίσουμε P τον πίνακα που πραγματοποιεί όλες αυτές τις εναλλαγές, τότε στον πίνακα PA η απαλοιφή προχωράει χωρίς εναλλαγές, και έχουμε έναν κάτω τριγωνικό πίνακα L και έναν πίνακα σε κλιμακωτή μορφή U, τέτοιους ώστε $PA = LU$.

Παραγοντοποίηση $PA = LU$

Θεώρημα

Σε κάθε $m \times n$ πίνακα A αντιστοιχεί

1. *ένας $m \times m$ πίνακας μεταθέσεων P,*
2. *ένας $m \times m$ κάτω τριγωνικός πίνακας L, με 1 στη διαγώνιο, και*
3. *ένας $m \times n$ πίνακας σε κλιμακωτή μορφή U*

τέτοιοι ώστε

$$PA = LU\,.$$