

MEM 102 Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα

Διάλεξη 29

Γραμμικοί υπόχωροι. Γραμμική ανεξαρτησία

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Νοε 2014

Μηδενόχωρος και χώρος στηλών

Για έναν $m \times n$ πίνακα A είδαμε το μηδενόχωρο και το χώρο στηλών του A .

Ο μηδενόχωρος είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, το υποσύνολο των διανυσμάτων x του $\mathbb{R}^n$ για τα οποία $Ax = 0$. Τον συμβολίζουμε $\mathcal{N}(A)$.

Ο χώρος στηλών είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$, το υποσύνολο των διανυσμάτων που μπορούν να εκφραστούν ως γραμμικοί συνδυασμοί των στηλών του A . Τον συμβολίζουμε $\mathcal{R}(A)$.

Υποσύνολα κλειστά ως προς τις πράξεις

Παρατηρούμε ότι και τα δύο αυτά υποσύνολα έχουν δύο σημαντικές ιδιότητες:

Εάν προσθέσουμε δύο διανύσματα του υποσυνόλου, το άθροισμα βρίσκεται στο υποσύνολο.

Εάν πολλαπλασιάσουμε ένα διάνυσμα του υποσυνόλου με κάποιο αριθμό, το πολλαπλάσιο βρίσκεται στο υποσύνολο.

Λέμε ότι τα υποσύνολα αυτά είναι **κλειστά** ως προς την πρόσθεση διανυσμάτων και τον πολλαπλασιασμό διανύσματος με αριθμό.

Παραδείγματα υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ που είναι ή δεν είναι κλειστά ως προς τις πράξεις:

- ❶ Η ευθεία $\varepsilon = \{(x, y) : -3x + 2y = 6\}$.
- ❷ Η ευθεία $\delta = \{(x, y) : -3x + 2y = 0\}$.
- ❸ Το επίπεδο $\Pi = \{(u, v, w) : 2u + v + w = 0\}$.
- ❹ Το επίπεδο $\Sigma = \{(u, v, w) : u + 2v - w = 1\}$.

Γραμμικοί υπόχωροι

Ορισμός. Ένα υποσύνολο V του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^n$ ονομάζεται **γραμμικός υπόχωρος** (ή **διανυσματικός υπόχωρος**) του $\mathbb{R}^n$ εάν

- 1 V δεν είναι κενό, $V \neq \emptyset$.
- 2 V είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση: εάν $a, b \in V$ τότε $a + b \in V$.
- 3 V είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό με αριθμό: εάν $a \in V$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε $\lambda a \in V$.

Λήμμα

Ο χώρος στηλών ενός $m \times n$ πίνακα A είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$.

Ο μηδενόχωρος ενός $m \times n$ πίνακα A είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

‘Περιττά’ διανύσματα

Για να βρούμε τις λύσεις της ομογενούς εξίσωσης $Ax = 0$ στο παράδειγμα, υπολογίσαμε δύο διανύσματα.

Δεν χρειάστηκε να υπολογίσουμε άλλα, γιατί όλες οι άλλες λύσεις προκύπτουν ως γραμμικοί συνδυασμοί αυτών των δύο.

Μία τρίτη λύση δεν προσφέρει κάτι περισσότερο στο μηδενοχώρο του πίνακα A . Με αυτή την έννοια είναι *περιττή*.

‘Περιττές’ εξισώσεις

Θεωρούμε το σύστημα γραμμικών εξισώσεων,

$$\begin{array}{rcccccl} 3x & + & 5y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & + & 4y & + & 3z & = & 0 \end{array}$$

Εάν θεωρήσουμε μόνο τις δύο πρώτες εξισώσεις, βλέπουμε ότι και αυτό το σύστημα έχει το ίδιο σύνολο λύσεων.

Η τρίτη εξίσωση είναι η διαφορά της δεύτερης από την πρώτη, και έτσι δεν βάζει κάποιον επί πλέον περιορισμό στο σύνολο λύσεων.

Με αυτή την έννοια, η τρίτη εξίσωση είναι *περιττή*.

Γραμμική εξάρτηση

Αυτή η έννοια του περιττού για λύσεις που δεν μεγαλώνουν το χώρο των λύσεων, ή εξισώσεις οι οποίες δεν θέτουν περισσότερους περιορισμούς, αποτελεί μία βασική έννοια της Γραμμικής Άλγεβρας, την οποία ονομάζουμε *γραμμική εξάρτηση*.

Μία συλλογή διανυσμάτων είναι γραμμικά εξαρτημένη όταν περιέχει περιττά διανύσματα.

Ένα σύστημα εξισώσεων είναι γραμμικά εξαρτημένο όταν περιέχει περιττές εξισώσεις.

Ορισμός. Τα διανύσματα $u_1, \dots, u_k$ του $\mathbb{R}^n$, για $k \geq 2$, είναι *γραμμικά εξαρτημένα* εάν ένα από αυτά μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

Για $k = 1$, το σύνολο $\{u_1\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο εάν $u_1 = 0$.

Λήμμα

Τα διανύσματα $v_1, \dots, v_n$ του $\mathbb{R}^m$ είναι γραμμικά εξαρτημένα εάν και μόνον εάν υπάρχει γραμμικός συνδυασμός με συντελεστές $c_1, \dots, c_n$, *οι οποίοι δεν είναι όλοι μηδέν*, τέτοιος ώστε

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0.$$

Εάν θεωρήσουμε τα διανύσματα $v_1, \dots, v_n$ ως τις στήλες ενός $m \times n$ πίνακα A , τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα εάν και μόνον εάν το ομογενές σύστημα $Ax = 0$ έχει λύσεις $x = (c_1, \dots, c_n)$ διαφορετικές από το $0 \in \mathbb{R}^n$.

Γραμμική ανεξαρτησία

Τα διανύσματα $v_1, \dots, v_n$ του $\mathbb{R}^m$ είναι **γραμμικά ανεξάρτητα** εάν δεν είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Συμβατικά θεωρούμε το κενό σύνολο $\emptyset$ γραμμικά ανεξάρτητο.

Λήμμα

Τα διανύσματα $v_1, \dots, v_n$ του $\mathbb{R}^m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα εάν και μόνον εάν ο μοναδικός γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \dots, v_n$ που είναι ίσος με μηδέν, είναι ο τετριμμένος, με όλους τους συντελεστές ίσους με 0.

Σε αυτή την περίπτωση, εάν τα διανύσματα $v_1, \dots, v_n$ είναι οι στήλες ενός $m \times n$ πίνακα A , το ομογενές σύστημα $Ax = 0$ έχει μοναδική λύση την $x = 0 \in \mathbb{R}^n$.

Πρόταση

Σε ένα πίνακα σε κλιμακωτή μορφή, οι μη μηδενικές γραμμές είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Το ίδιο ισχύει για τις στήλες που περιέχουν οδηγούς.

Η τάξη ενός πίνακα είναι ο αριθμός που μας δίνει το πραγματικό μέγεθος του πίνακα.

Μετράει τον αριθμό των μη περιττών εξισώσεων, των μη μηδενικών γραμμών στον κλιμακωτό πίνακα.

Επίσης μετράει τον αριθμό των στηλών με οδηγούς, αυτών που πραγματικά συνεισφέρουν στο χώρο στηλών.