MEM 102 Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα

Διάλεξη 32

Γραμμικές απεικονίσεις

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Νοε 2014

Πολλαπλασιασμός με πίνακα

Οταν πολλαπλασιάζουμε ένα διάνυσμα x με ένα πίνακα A παίρνουμε ένα καινούργιο διάνυσμα Ax.

Εάν $x \in \mathbb{R}^n$ και ο πίνακας είναι $m \times n$, παίρνουμε ένα διάνυσμα στο $\mathbb{R}^m$.

Ετσι μπορούμε στον πίνακα A να αντιστοιχίσουμε μια απεικόνιση T_A από το χώρο $\mathbb{R}^n$ στο χώρο $\mathbb{R}^m$,

$$T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : x \mapsto Ax .$$

Τί ιδιότητες έχουν οι απεικονίσεις που προκύπτουν από πολλαπλασιασμό με ένα πίνακα;

1. Το 0 πρέπει να απεικονίζεται στο 0: $T_A(0) = 0$, εφόσον $A0 = 0$.
2. Πολλαπλάσια ενός διανύσματος πρέπει να απεικονίζονται στα αντίστοιχα πολλαπλάσια της εικόνας του διανύσματος: $T_A(cx) = c\,T_A(x)$, εφόσον $A(cx) = c(Ax)$.
3. Το άθροισμα δύο διανυσμάτων απεικονίζεται στο άθροισμα των εικόνων των δύο διανυσμάτων: $T_A(x + y) = T_A(x) + T_A(y)$, εφόσον $A(x + y) = Ax + Ay$.

Απεικονίσεις που έχουν αυτές τις ιδιότητες ονομάζονται **γραμμικές απεικονίσεις** ή **γραμμικοί μετασχηματισμοί**.

Γραμμικές απεικονίσεις

Ορισμός. Η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι **γραμμική απεικόνιση** εάν για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ και κάθε $c \in \mathbb{R}$,

1. $f(x+y) = f(x) + f(y)$ και
2. $f(cx) = c\, f(x)$.

Γενικότερα, εάν V και W είναι διανυσματικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$ και του $\mathbb{R}^m$ αντίστοιχα, μία απεικόνιση $f : V \to W$ είναι γραμμική εάν ικανοποιούνται οι παραπάνω συνθήκες για κάθε $v \in V$.

Πίνακας γραμμικής απεικόνισης

Είδαμε οτι για κάθε $m \times n$ πίνακα A, η απεικόνιση T_A είναι γραμμική.

Θα δείξουμε οτι, αντίστροφα, κάθε γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ αντιστοιχεί σε ένα πίνακα.

Υπενθυμίζουμε οτι εάν $\kappa_1, \ldots, \kappa_n$ είναι οι στήλες του πίνακα A, τότε

$$A \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = u_1\kappa_1 + \cdots + u_n\kappa_n \,.$$

Πρόταση

Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ και τον πίνακα A με στήλες τα διανύσματα $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$, όπου $e_1, e_2, \ldots, e_n$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Τότε $f = T_A$.

Η Πρόταση μπορεί να γενικευθεί ως εξής.

Οι τιμές μίας γραμμικής απεικόνισης $f : V \to W$ στα διανύσματα $v_1, v_2, \ldots, v_k$ μίας βάσης του πεδίου ορισμού V, καθορίζουν την απεικόνιση:

Κάθε $v \in V$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης, $v = c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k$, και τότε η γραμμικότητα της f προσδιορίζει το διάνυσμα $f(v)$,

$$f(v) = c_1 f(v_1) + \cdots + c_k f(v_k)\,.$$

Σύνθεση γραμμικών απεικονίσεων

Η προσεταιριστική ιδιότητα του γινομένου πινάκων εξασφαλίζει οτι η σύνθεση δύο γραμμικών απεικονίσεων είναι γραμμική και αντιστοιχεί στο γινόμενο των πινάκων.

Πρόταση

Εάν A, B είναι πίνακες, $m \times n$ και $n \times p$ αντίστοιχα, ώστε να ορίζεται το γινόμενο $C = AB$, τότε ισχύει

$$T_A \circ T_B = T_C \,.$$