

MEM 102 Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα

Διάλεξη 34

Εικόνα και αντίστροφη εικόνα

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Νοε 2014

Εικόνα και αντίστροφη εικόνα

Πρόταση

Θεωρούμε τον $m \times n$ πίνακα A , και την αντίστοιχη γραμμική απεικόνιση $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

- ① Εάν V είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, τότε η **εικόνα** του V μέσω της απεικόνισης T_A ,

$$T_A(V) = \{T_A(v) \mid v \in V\}$$

είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$.

- ② Εάν W είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$, τότε η **αντίστροφη εικόνα** του W μέσω της απεικόνισης T_A ,

$$T_A^{-1}(W) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid T_A(v) \in W\}$$

είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

Η **εικόνα** της απεικόνισης T_A είναι ο υπόχωρος

$$T_A(\mathbb{R}^n) = \{ T_A(v) \mid v \in \mathbb{R}^n \}$$

ο οποίος είναι ίσος με το χώρο στηλών $\mathcal{R}(A)$ του πίνακα A .

Πρόταση

Εάν A είναι $m \times n$ πίνακας, τότε η απεικόνιση T_A είναι

- ① ενεικονική, εάν και μόνον εάν $r = n$, δηλαδή όταν $\mathcal{N}(A) = \{0\}$,
- ② επεικονική, εάν και μόνον εάν $r = m$, δηλαδή όταν $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^m$, και
- ③ αμφιμονοσήμαντη εάν και μόνον εάν $r = m = n$, δηλαδή όταν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος.

Αριστερό και δεξιό αντίστροφο

Θεωρούμε μία απεικόνιση $f : N \longrightarrow M$ από το σύνολο N στο σύνολο M .

Μία απεικόνιση $g : M \longrightarrow N$ τέτοια ώστε $g \circ f = \text{id}_N$ ονομάζεται **αριστερό αντίστροφο** της f .

Μία απεικόνιση $h : M \longrightarrow N$ τέτοια ώστε $f \circ h = \text{id}_M$ ονομάζεται **δεξιό αντίστροφο** της f .

Πρόταση

Μία απεικόνιση $f : N \longrightarrow M$ έχει αριστερό αντίστροφο $g : M \longrightarrow N$, τέτοιο ώστε $g \circ f = \text{id}_N$, εάν και μόνον εάν η f είναι ενεικονική.

Μία απεικόνιση $f : N \longrightarrow M$ έχει δεξιό αντίστροφο $h : M \longrightarrow N$, τέτοιο ώστε $f \circ h = \text{id}_M$, εάν και μόνον εάν η f είναι επεικονική.

Αριστερός και δεξιός αντίστροφος πίνακας

Ορισμός. Εάν A είναι ένας $m \times n$ πίνακας,

- 1 ο $n \times m$ πίνακας B είναι **αριστερός αντίστροφος** του A , εάν $BA = I_n$.
- 2 ο $n \times m$ πίνακας C είναι **δεξιός αντίστροφος** του A , εάν $AC = I_m$.

Πρόταση

Ο $m \times n$ πίνακας A , έχει

- 1 αριστερό αντίστροφο εάν και μόνον εάν η τάξη $r = n \leq m$.
- 2 δεξιό αντίστροφο εάν και μόνον εάν η τάξη $r = m \leq n$.

Μπορούμε να δείξουμε ότι εάν η τάξη του $m \times n$ πίνακα A είναι $r = n$, τότε ο πίνακας $A^T A$ είναι αντιστρέψιμος.

Θέτουμε $B = (A^T A)^{-1} A^T$, και έχουμε

$$BA = \left[(A^T A)^{-1} A^T \right] A = (A^T A)^{-1} (A^T A) = \mathbf{I}_n.$$

Εάν η τάξη του A είναι $r = m$, τότε ο πίνακας AA^T είναι αντιστρέψιμος.

Θέτουμε $C = A^T (AA^T)^{-1}$, και έχουμε

$$AC = A \left[A^T (AA^T)^{-1} \right] = (AA^T)(AA^T)^{-1} = \mathbf{I}_m.$$

Τετραγωνικοί πίνακες

Στην περίπτωση ενός τετραγωνικού πίνακα A , $m = n$, και τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- 1 Η τάξη του πίνακα είναι $r = n$.
- 2 Ο πίνακας A έχει αριστερό αντίστροφο.
- 3 Ο πίνακας A έχει δεξιό αντίστροφο.
- 4 Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος.