

Γραμμική Άλγεβρα II

Διάλεξη 18

Διανυσματικοί Χώροι με Εσωτερικό Γινόμενο.

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

12/5/2014

Εσωτερικό Γινόμενο

Ορισμός. Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$). Μια απεικόνιση

$$V \times V \rightarrow \mathbb{K} : (v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$$

ονομάζεται **εσωτερικό γινόμενο** εάν

ΕΓ 1. Είναι γραμμική στην πρώτη μεταβλητή, δηλαδή εάν για κάθε $u, v, w \in V$ και $a \in \mathbb{K}$,

$$\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \quad \text{και} \quad \langle av, w \rangle = a \langle v, w \rangle.$$

ΕΓ 2. Για κάθε $v, w \in V$,

$$\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}.$$

ΕΓ 3. Για κάθε $v \in V$, εάν $v \neq 0$, τότε $\langle v, v \rangle > 0$.

Εσωτερικό γινόμενο (2)

Εάν $\langle v, w \rangle = 0$, λέμε ότι τα διανύσματα v και w είναι **ορθογώνια**.

Εάν το σώμα $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, τότε η ιδιότητα ΕΓ 2 σημαίνει ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι συμμετρικό, και μαζί με την ΕΓ 1, ότι είναι γραμμικό και στη δεύτερη μεταβλητή.

Αντιθέτως, εάν $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, για τη δεύτερη μεταβλητή έχουμε

$$\begin{aligned}\langle v, aw \rangle &= \overline{\langle aw, v \rangle} \\ &= \overline{a \langle w, v \rangle} \\ &= \bar{a} \langle v, w \rangle.\end{aligned}$$

Εσωτερικό γινόμενο: παραδείγματα

Παράδειγμα Στο $\mathbb{R}^n$ ορίζεται το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο: εάν $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i .$$

Τα διανύσματα (x_1, x_2) και $(-x_2, x_1)$ είναι ορθογώνια διανύσματα στο $\mathbb{R}^2$ με το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο.

Παράδειγμα Στο $\mathbb{C}^n$ ορίζεται εσωτερικό γινόμενο για $z = (z_1, \dots, z_n)$, $w = (w_1, \dots, w_n)$,

$$\langle z, w \rangle = \sum_{i=1}^n z_i \bar{w}_i .$$

Εσωτερικό γινόμενο: παραδείγματα (2)

Παράδειγμα Στο χώρο των πολυωνύμων $\mathbb{K}[x]$ ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 p(t) \overline{q(t)} dt \quad (1)$$

Τα πολυώνυμα $p(x) = (x - \frac{1}{2})^2$ και $q(x) = (x - \frac{1}{2})^3$ είναι ορθογώνια:

$$\begin{aligned} \langle p(x), q(x) \rangle &= \int_0^1 (t - \tfrac{1}{2})^2 (t - \tfrac{1}{2})^3 dt \\ &= \int_0^1 (t - \tfrac{1}{2})^5 dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Εσωτερικό γινόμενο: παραδείγματα (3)

Παράδειγμα Στο χώρο των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[a, b]$, με πραγματικές τιμές, $C[a, b]$, ή με μιγαδικές τιμές, $C_{\mathbb{C}}[a, b]$, ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(s) \overline{g(s)} ds \quad (2)$$

Οι συναρτήσεις $\sin$ και $\cos$ είναι ορθογώνιες στο $C[0, \pi]$.

Ανισότητα Cauchy – Schwarz

Θεώρημα (Ανισότητα Cauchy-Schwarz)

Σε ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο ισχύει, για κάθε v, w :

$$|\langle v, w \rangle| \leq \sqrt{\langle v, v \rangle} \sqrt{\langle w, w \rangle}.$$

Ανισότητα Cauchy – Schwarz (2)

Ειδικές περιπτώσεις της ανισότητας Cauchy-Schwarz είναι οι ακόλουθες ανισότητες.

Στο χώρο $\mathbb{R}^n$ ή $\mathbb{C}^n$, με το συνήθες εσωτερικό γινόμενο

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i,$$

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Στο χώρο $C[a, b]$, με εσωτερικό γινόμενο $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(s)g(s)ds$,

$$\left| \int_a^b f(s)g(s)ds \right| \leq \left(\int_a^b (f(s))^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_a^b (g(s))^2 ds \right)^{1/2}.$$

Νόρμα από εσωτερικό γινόμενο

Πρόταση

Εάν V είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, τότε ορίζεται μία νόρμα στο V :

$$||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Με τον συμβολισμό της νόρμας, η ανισότητα Cauchy-Schwarz γράφεται στη μορφή

$$|\langle v, w \rangle| \leq ||v|| \, ||w||.$$

Νόμος παραλληλογράμμου

Πρόταση

Έστω V ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο.

- ❶ **Νόμος του Παραλληλογράμμου.** Για κάθε $v, w \in V$ ισχύει η ισότητα

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2.$$

- ❷ **Πυθαγόρειο Θεώρημα.** Εάν $v_1, \dots, v_k \in V$ και $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ όταν $i \neq j$, τότε

$$\|v_1 + \dots + v_k\|^2 = \|v_1\|^2 + \dots + \|v_k\|^2.$$