

Γραμμική Άλγεβρα II
Διάλεξη 19
Ορθοκανονικά Σύνολα Διανυσμάτων.

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

12/5/2014

Ορθοκανονικά σύνολα διανυσμάτων

Ορισμός. Ένα σύνολο διανυσμάτων $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ ονομάζεται **ορθογώνιο** εάν τα στοιχεία του είναι ορθογώνια ανά δύο, δηλαδή εάν για κάθε $i, j = 1, \dots, n, i \neq j$,

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0.$$

Εάν επί πλέον, για κάθε $i = 1, \dots, n, \|v_i\| = 1$, το σύνολο ονομάζεται **ορθοκανονικό**.

Λήμμα

Ένα ορθοκανονικό σύνολο είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Ορθοκανονική βάση

Οι συντεταγμένες ενός διανύσματος ως προς μία ορθοκανονική βάση δίδονται απλώς από τα εσωτερικά γινόμενα του διανύσματος με τα διανύσματα της βάσης:

Εάν $\{v_1, \dots, v_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση, και $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ τότε

$$\begin{aligned}\langle v, v_j \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n a_i v_i, v_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \langle v_i, v_j \rangle \\ &= a_j.\end{aligned}$$

Ορθοκανονικοποίηση Gram – Schmidt

Θεώρημα (Ορθοκανονικοποίηση Gram – Schmidt)

Θεωρούμε χώρο V με εσωτερικό γινόμενο, και ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο $\{v_1, \dots, v_n\}$. Τότε υπάρχει ορθοκανονικό σύνολο $\{u_1, \dots, u_n\}$ τέτοιο ώστε για κάθε $i = 1, \dots, n$

$$u_i \in \langle v_1, \dots, v_i \rangle$$

και

$$\langle u_1, \dots, u_n \rangle = \langle v_1, \dots, v_n \rangle.$$

Παραγοντοποίηση QR

Η διαδικασία Gram – Schmidt μπορεί να εκφραστεί ως παραγοντοποίηση ενός πίνακα.

Πρόταση

Εάν ο $n \times k$ πίνακας A έχει γραμμικά ανεξάρτητες στήλες $v_1, \dots, v_k$, τότε υπάρχει $n \times k$ πίνακας Q με ορθοκανονικές στήλες $u_1, \dots, u_k$ και αντιστρέψιμος άνω τριγωνικός $k \times k$ πίνακας R τέτοιοι ώστε

$$A = QR.$$

Οι στήλες του Q είναι τα ορθοκανονικά διανύσματα που προκύπτουν από τη διαδικασία Gram – Schmidt στο σύνολο $\{v_1, \dots, v_k\}$ και $R_{ij} = \langle u_i, v_j \rangle$.